

Vol.12
Ene - Jun 2019
ISSN: 2007-4107

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

El Cálculo y su Enseñanza

Enseñanza de las Ciencias y la Matemática

ANÁLISIS DE REGISTROS SEMIÓTICOS UTILIZADOS POR ALUMNOS DEL TECNM: ITCDJ EN EL TEMA DE DESIGUALDADES

El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática

ISSN: 2007- 4107 (electrónico)

Rubén Abraham Moreno Segura[1]
Bertha Ivonne Sánchez Luján[2]

Recibido: 10 de febrero de 2019,

Aceptado: 16 de mayo de 2019

Autor de Correspondencia: 

Rubén Abraham Moreno Segura

abram.moreno@hotmail.com



Resumen. Los registros semióticos desde la teoría de Duval (2006) establecen dos acciones importantes, la *conversión* y el *tratamiento.* La primera se refiere a pasar de un registro a otro (simbólico, gráfico, algebraico y discursivo) y la segunda a las manipulaciones necesarias manteniendo el registro de inicio. Por otro lado, el tema de desigualdades posee una riqueza en representaciones semióticas que representa un objeto de estudio con bastante potencial que no ha sido explotado, debido a la poca existencia de trabajos previos que se encuentran del tema (Borello, 2010; Cuevas *et al.*, 2001; Prada-Núñez *et al.*, 2017). Por lo tanto, en esta investigación se trata de estudiar en que registro se desenvuelven mayoritariamente los estudiantes de ingeniería del TecNM: ITCdJ con ayuda de una secuencia didáctica apoyada en la teoría de Situaciones Didácticas.

Palabras clave: desigualdades, contextualización de la matemática, cálculo diferencial.

Abstrac. The semiotic registers from Duval's theory (2006) establish two important actions, the conversion and the treatment. The first refers to moving from one register to another (symbolic, graphic, algebraic and discursive) and the second to the necessary manipulations while maintaining the start record. On the other hand, the issue of inequalities has a wealth of semiotic representations that represent an object of study with a lot of potential that has not been exploited, due to the lack of previous works that are on the subject (Borello, 2010; et al., 2001; Prada-Núñez et al., 2017). Therefore, in this research it is a matter of studying in which registry the engineering students of the TecNM develop: ITCdJ with the help of a didactic sequence supported by the theory of Didactic Situations.

Key words: inequalities, contextualization of mathematics, differential calculus.

[1] *Universidad Autónoma de San Luis Potosi / México/ Correo: abram.moreno@hotmail.com*
[2] *TecNM: Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez / México/ Correo: ivonnesanchez10@yahoo.com*

1. Introducción

Según Borello (2010) una de las principales problemáticas en el tema de desigualdades es el poco tiempo que se le destina a este tema, ya que en el nivel medio superior sólo se le dedica unas cuantas horas en la asignatura de álgebra y a nivel superior sólo se repite el suceso en carreras que contienen un curso de precálculo, en lo cual el tema se toma como un conjunto de técnicas que sólo se quedan en un nivel de memorización y que por todo lo anterior llega a la conclusión de que no es un considerado como un tema esencial para el desarrollo matemático de los estudiantes. Cuevas (2014) afirma que en nivel universitario es de suma importancia un conocimiento adecuado sobre desigualdades en los estudiantes que cursen una materia de cálculo diferencial ya que se usan para definir otros conceptos básicos en esta rama de la matemática, por lo que él propone una secuencia, basada en la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), en la que a pesar de la deficiencia de los conocimientos previos necesarios, se logre una una mejor adquisición de este tema y afirma lo siguiente.

> Es esencial que el estudiante este realizando siempre una acción, por lo que a través de la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado; cada vez que se introduzca un concepto se debe partir de un problema contextualizado y que resulte interesante para el estudiante; una vez resuelto un problema el estudiante debe comprobar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico de acuerdo al problema planteado; cada vez que se presenten las operaciones directas asociadas a un concepto, de ser posible, implementar ejercicios que representen a la operación inversa asociada; cuando se proponga un método de resolución de un problema se debe intentar dar una forma alternativa de solución, si esto no es posible, entonces no imponer una forma única de solución; si un concepto se ilustra mediante ejercicios en más de un registro de representación, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la translación o articulación de los mismos (Cuevas, 2014, p. 238).

Es primordial que los problemas se encuentren en el entorno del alumno para incentivar la motivación y se percaten de la aplicabilidad del objeto matemático, así como la selección y el cambio gradual en los problemas que se propongan. Otro factor que dificulta el aprendizaje de los alumnos en cuanto al tema de desigualdades es la manera en la que tradicionalmente se enseña relacionándolo muchas veces de forma errónea con los conocimientos previos que los alumnos tienen respecto a igualdades, pero agregando un par de reglas debido a la similitud que hay entre estos dos objetos matemáticos, y las cuales, mayoritariamente no se explican y se da como un patrón memorístico o una receta a seguir (Bazzini, 1999).

Ahora bien, para subsanar estas deficiencias Barbosa (2003) sugiere un cambio en la manera de transmitir este conocimiento aunando a la interpretación y a la resolución algebraica un método gráfico de resolución para conseguir un mejor entendimiento, ya que los alumnos, y algunos profesores se quedan con un nivel de profundización muy superficial

Robayna (1994) hace una búsqueda de investigaciones previas recapitulando los errores más comunes en el lenguaje algebraico los cuales se deben a errores en aritmética, además de que afirma que el álgebra es más que dar significado a los símbolos empleados, es ser consciente y controlar los procesos que implica la aritmética de una forma más general.

Por su parte, Freudenthal (1983), afirma que la adquisición de un lenguaje como lo es el algebraico, debe ser apoyado por alguien que conozca sus reglas y características, a diferencia de la lengua materna la cual, es transmitida por los padres que sólo la usan sin conocer sus características y reglas a profundidad, pero que ambos lenguajes, algebraico y lengua materna, sólo logran aprenderse usándolos.

Ahora bien, los programas de estudio de las asignaturas de matemáticas en el Tecnológico Nacional de México (TecNM), incluyen el desarrollo de competencias y habilidades en los estudiantes, (TecNM, 2015), las cuales no se desarrollan exclusivamente dentro de la institución, sino que se han fomentado desde los niveles educativos anteriores. Dentro de las materias del TecNM: Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez (TecNM: ITCdJ) hay 10 cursos denominados "Asignaturas Comunes", los cuales se cursan en las 6 carreras que se ofertan en este plantel, de estos cursos se rescata la materia de Cálculo Diferencial, en primer semestre, la cual, según el plan de la materia:

> …contribuye a desarrollar un pensamiento lógico-matemático al perfil del ingeniero y aporta las herramientas básicas para introducirse al estudio del cálculo y su aplicación, así como las bases para el modelado matemático. Además, proporciona herramientas que permiten modelar fenómenos de contexto (Tecnológico Nacional de México, 2016, p. 1).

Este plan de estudios menciona que el curso de Cálculo Diferencial tiene cinco temas siendo el primero de ellos el referente a desigualdades, y menciona que "El primer tema se inicia con un estudio sobre los números reales y sus propiedades básicas, así como la solución de problemas con desigualdades. Esto servirá de sustento para el estudio de las funciones de variable real" (Tecnológico Nacional de México, 2016, p. 1). Es decir, lo que establece el TecNM (2016) es acorde a lo afirmado por Cuevas (2014). Por lo que el problema que surge entonces es proporcionar una enseñanza acorde a lo establecido por el TecNM (2016) en sus planes de estudio. Por lo que los objetivos de la presente investigación son

Objetivo general.

- Identificar el tipo de registro semiótico en el que se desenvuelven mayormente los alumnos de nuevo ingreso al TecNM/ITCdJ.

Objetivos específicos.

- Identificar los errores más comunes que se presentan en la resolución de problemas de desigualdades entre los estudiantes de nuevo ingreso al TecNM/ITCdJ.
- Generar estrategias para subsanar las deficiencias en el manejo del lenguaje algebraico en los alumnos del TecNM/ITCdJ.

Además de que surgen las siguientes preguntas de investigación

1. ¿Cómo resuelven los alumnos problemas que impliquen un cambio de registro del discursivo al gráfico y/o algebraico?
2. ¿En qué tipo de registro se desenvuelven mayormente los alumnos?
3. ¿Qué tipos de problemas se debe elegir para desarrollar el interés de los alumnos y favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos?

2. Elementos teóricos.

La teoría de situaciones didácticas de Guy Broussseau explica a través de la tripleta alumno-profesor-contenido el proceso de enseñanza de la matemática escolar a través de diversas situaciones, como la situación de acción, de formulación, de validación o de institucionalización, cada una con sus características y formas de llevarse a cabo (Salinas Muñoz, 2010). Además de que Brousseau (2000) remarca que la manera en la que se presente el conocimiento, en cualquiera que sea la modalidad de la situación debe ser tal que a partir de los distintos significados puede conllevar una situación en la cual los alumnos interioricen el contenido y lo relaciones con experiencias previas. Así también, hay dos etapas en las que los conocimientos sufren dos momentos importantes, el primero de ellos es la devolución, donde el estudiante asume la responsabilidad y toma el problema como suyo para poder llegar a una resolución, el siguiente es la validación en el cual el conocimiento creado por los estudiantes es puesto a prueba, se compara y se contrasta con el conocimiento científico para dar una sanción sobre dicho saber, i.e., se compara lo que hacen los alumnos con lo que la comunidad científica establece como correcto o adecuado y se acepta, se modifica o se rechaza según sea el caso (Salinas Muñoz, 2010).

De igual forma, para la presentación de estos contenidos es necesario que el docente conozca y tenga la habilidad de construir recursos de enseñanza aprendizaje, los cuales deben desarrollarse y tomar en cuenta que el aprendizaje es un proceso activo cuyo fin es la construcción de significados, los cuales serán permanentes en la medida que se interioricen a partir de experiencia de los alumnos, como resultado de las interacciones entre el conocimiento, el docente y el estudiante dentro del contexto sociocultural y temporal, de tal forma que esta labor sea un acto de intención-acción-reflexión por parte de todos los involucrados (Coll, 2001).

Todo lo anterior mencionado fue tomado como fundamento al momento de diseñar la secuencia didáctica.

Otra teoría de matemática educativa es la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, en la cual establece que existen cuatro tipos de registro semiótico: simbólico, gráfico, algebraico y discursivo, cada uno con sus características y cada uno con una manera de representar el mismo objeto matemático, empero las cuales no son relacionadas por los alumnos, debido a que, por ejemplo una ecuación de una recta de manera algebraica para ellos es un objeto totalmente disjunto, de la gráfica de una recta, o de la forma de presentarlo en un problema de variación lineal lo que correspondería al registro discursivo. Este tipo de acción de pasar de un registro a otro se denomina *Conversión*, mientras que el *Tratamiento* se refiere a todas las manipulaciones del objeto matemático sin cambiar de registro, como se presenta en la resolución algebraica de una ecuación lineal, en la cual, al despejar la incógnita para deducir su valor no implica el cambio a un registro gráfico o discursivo la mayoría de las veces. Por lo tanto, el mayor problema de los estudiantes se

debe a la conversión de un registro ya que no consideran cada uno de los registros como diferentes caras de la misma moneda, sino como diferentes monedas simplemente (Duval, 2006).

En este proyecto se entenderá como registro simbólico a las operaciones aritméticas, al registro grafico al uso de graficas de los intervalos, discursivo al planteamiento del problema y a las explicaciones que puedan dar por escrito los estudiantes y algebraico al uso de operaciones algebraicas, además de los constructos teóricos de conversión y tratamiento como los define Duval (2006).

3. Material y métodos.

El diseño de la investigación es de tipo transversal ya que se centra en analizar el nivel de las variables en un momento específico (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). La población fue de 42 alumnos divididos en 2 grupos, uno con 17 estudiantes y el otro con 25, ambos de primer semestre de las carreras de Ingeniería Electromecánica (Grupo 1) e Ingeniería Mecatrónica (Grupo 2) alumnos de nuevo ingreso al TecNM/ITCdJ en agosto de 2017. Se dio un repaso de 4 horas reloj, sobre desigualdades, que son, para qué sirven, como se resuelven de manera algebraica y gráfica y porque se resuelven así, todo esto de manera magistral, posterior a los cual se aplicó una secuencia didáctica con el tema de desigualdades apoyada en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau contextualizada con el tema de "Los Nogales".

4. Diseño de la secuencia didáctica.

La secuencia fue contextualizada con la producción de un rancho nogalero, los cuales son característicos en Ciudad Jiménez, Chihuahua, usando los constructos teóricos de la importancia de la significatividad a los estudiantes y la relevancia con su contexto, la cual fue diseñada en el mes de Julio del 2017 en San Luis Potosí como trabajo de la estancia en el Verano de la Investigación Científica de la Academia Mexicana de Ciencias (AMC). La secuencia tiene como objetivo identificar la habilidad de los alumnos al resolver problemas sobre inecuaciones, es decir, si los alumnos eran capaces de interpretar el problema adecuadamente para extraer los datos necesarios, convertirlo a un lenguaje algebraico y/o gráfico, así como identificar la o las operaciones que les ayudaban a resolver el problema. Para ello se plantearon dos momentos, con dos tareas cada uno. En total cuatro planteamientos a resolver presentados de manera discursiva solicitando a los alumnos que realizaran una *conversión* de registro de manera tal que pudieran dar respuesta al problema.

La resolución de la secuencia fue en la hora clase de cada grupo, donde tenían a lo más 60 minutos para completar las cuatro actividades de las que constaba la secuencia. Los estudiantes debían resolverlo de manera individual y fue permitido el uso de calculadora para resolver las operaciones necesarias, pero se les pidió que justificarán todos sus pasos y escribieran las operaciones que realizaron para poder seguir su razonamiento al momento de evaluar.

5. Resultados

La secuencia consta de dos momentos cada uno con dos tareas, que proporcionan cuatro problemas o situaciones que resolver. Los problemas planteados tenían más de un método de resolución, pero se esperaba que al haber tenido un repaso del tema de desigualdades en las clases anteriores los estudiantes trataran de resolverlos en su mayoría usando esta herramienta matemática. Cada tarea

se calificó en base 100, y al final se obtuvo una calificación final por cada estudiante con el promedio del puntaje de los cuatro problemas. Según la norma en el TecNM la mínima aprobatoria es 70.

En la primera actividad es necesario realizar una conversión de los límites del intervalo de grados Celsius a Fahrenheit. El total del grupo 1 resolvió el problema a través de una conversión directa de los límites sin incluir algún procedimiento que involucrará una desigualdad a resolver, mientras que en el grupo 2 sólo el 88% del grupo realizó esta misma acción, i.e., el 92.85% de la población no convirtió el registro discursivo del problema al registro algebraico para resolver una desigualdad, sino que se auxiliaron del registro simbólico (conversión directa de los límites con operaciones básicas) para llegar a un resultado. Se muestra un ejemplo de esta situación en la Figura 1.

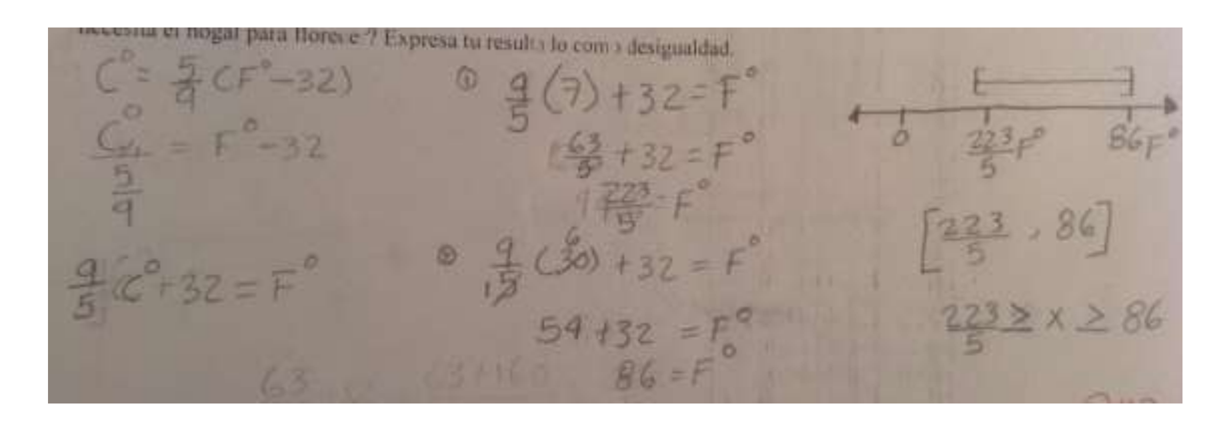


Figura 1. Ejemplo de resolución de un problema en registro simbólico (operaciones básicas) y la conversión a otros registros (gráfico y algebraico)
Autoría propia.

Ahora, la presentación de la respuesta usando el registro gráfico aun cuando este no fue el registro utilizado para obtener un resultado fue algo que el 82.35% de los alumnos del grupo 1 y el 76% del grupo 2 realizaron, es decir el 78.57% de los estudiantes en este problema lograron una conversión al registro gráfico. Además, el 41.11% de los estudiantes del grupo 1 fueron capaces de convertir su respuesta al registro algebraico además del gráfico, en el grupo 2 sólo el 24% de los estudiantes también logró este hecho.

La segunda tarea del momento uno implica determinar el número mínimo de viajes que debe realizar un campesino para llevar determinado número de costales de un lugar a otro teniendo como restricción cierto peso máximo que soporta la camioneta en la que se transporta. De este problema se obtuvieron los siguientes resultados: el 35. 29% del grupo 1 y el 48% de los estudiantes del grupo 2 utilizaron un registro discursivo para resolver el problema acompañado en menor medida con el registro simbólico (operaciones básicas) y obtener una respuesta correcta a la situación planteada como se logra ver en la Figura 2.

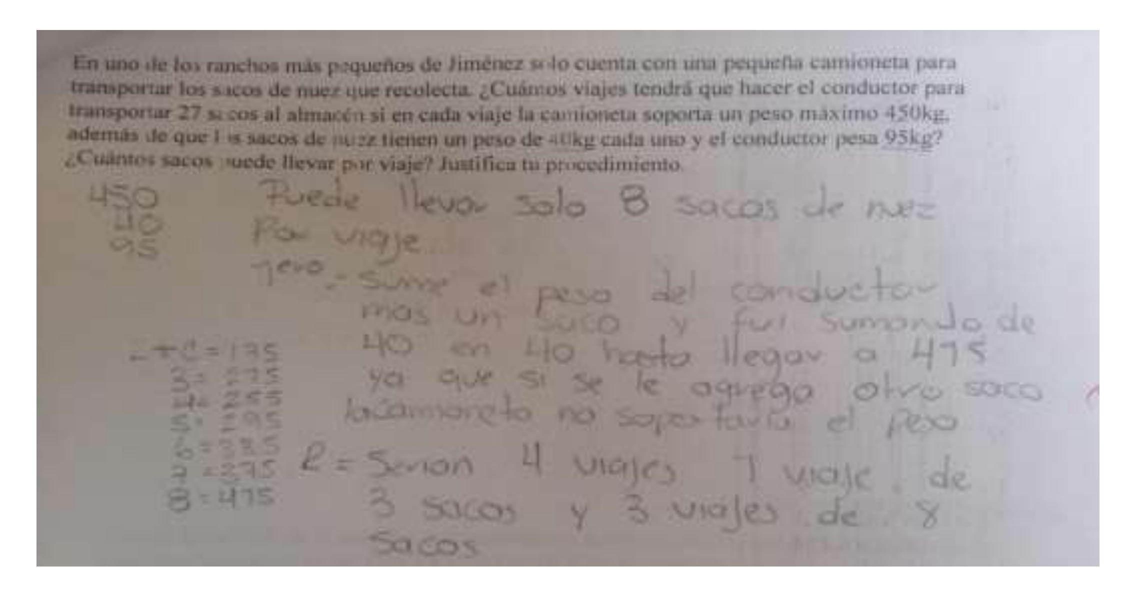


Figura 2 Ejemplo de resolución de problema usando el registro discursivo.
Autoría propia.

Además, el 17. 64% de los estudiantes del primer grupo fueron capaces de convertir el registro discursivo presentado en la situación a un registro algebraico, en forma de desigualdad que diera respuesta a la problemática presentada. En el primer grupo se apoyaron con el registro simbólico (dibujos) para llegar a la resolución del problema el 11.76% de los estudiantes. En este mismo grupo, el 41.17% presentan errores de interpretación ya sea en la representación gráfica o simbólica (representación de intervalos) al responder que puede haber menos infinitos viajes, i.e., es decir en su respuesta consideran que es posible que hayan menos de cero viajes.

De igual forma, el 11.76% de los estudiantes de ese grupo presentaron una alternativa de solución que también era óptima para resolver el problema.

Como se muestra en la Figura 3.

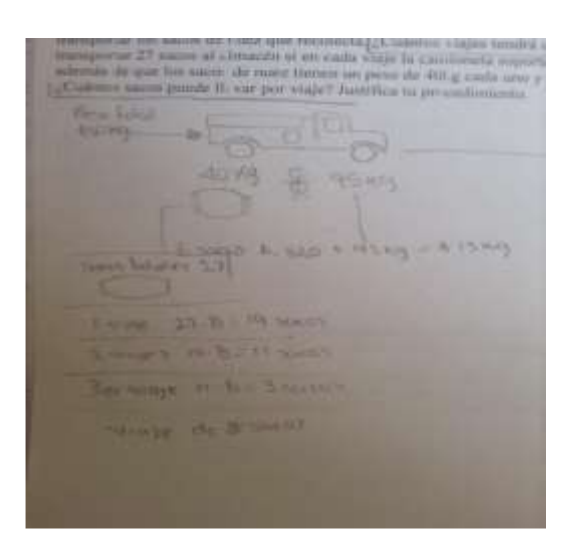


Figura 3. Ejemplo del uso del registro simbólico (dibujos) para la resolución del problema.
Autoría propia.

Ahora bien, el 41.17% y 40% del grupo 1 y 2, respectivamente fueron capaces de representar gráficamente el resultado obtenido usando otro registro distinto al algebraico, es decir, utilizaron el simbólico (operaciones básicas). Esto implica que el 40.47% de toda la población fue capaz de cambiar del registro simbólico al gráfico adecuadamente.

El tercer problema implicó calcular un promedio para obtener la medida mínima de una nuez para que la calidad de cierta muestra se mantuviera dentro de los estándares requeridos para su venta. Los principales resultados obtenidos en este problema se mencionan a continuación.

El 76.47% del grupo 1 no fue capaz de resolver el problema y dieron como respuesta el mismo intervalo que el problema proporciona como dato para empezar a resolverlo, es decir, sólo responden con datos directos del problema sin manipularlos o justificar el por qué ese intervalo queda igual tanto en el problema como en la solución. Esta situación se replica en el 20% de los estudiantes del grupo 2, de aquí se desprende que el 42.85% de todos los estudiantes no son capaces de justificar la respuesta o explicar la razón de que un dato que proporciona el problema sea la respuesta.

Otra situación que se presentó es que a partir del cálculo de ciertos promedios y porcentajes el 11.76% y 56% de los estudiantes de cada grupo respectivamente lograron calcular un intervalo dentro del correcto, es decir, proporcionan un subconjunto del conjunto que contiene la respuesta acertada. Es decir, el 38.09% de la población usó el registro simbólico (operaciones básicas) para aproximarse a una respuesta correcta.

Sólo el 8% de los alumnos del grupo 2, es decir, el 4.76% del total logró responder correctamente la problemática y se apoyaron del registro discursivo mayoritariamente con el uso del simbólico (operaciones básicas) para llegar a dicha conclusión.

La segunda tarea del segundo momento fue estimar el peso máximo de unos costales de nuez para no generar pérdidas económicas al momento de trasladarlos por avión. Los resultados más relevantes se presentan en seguida.

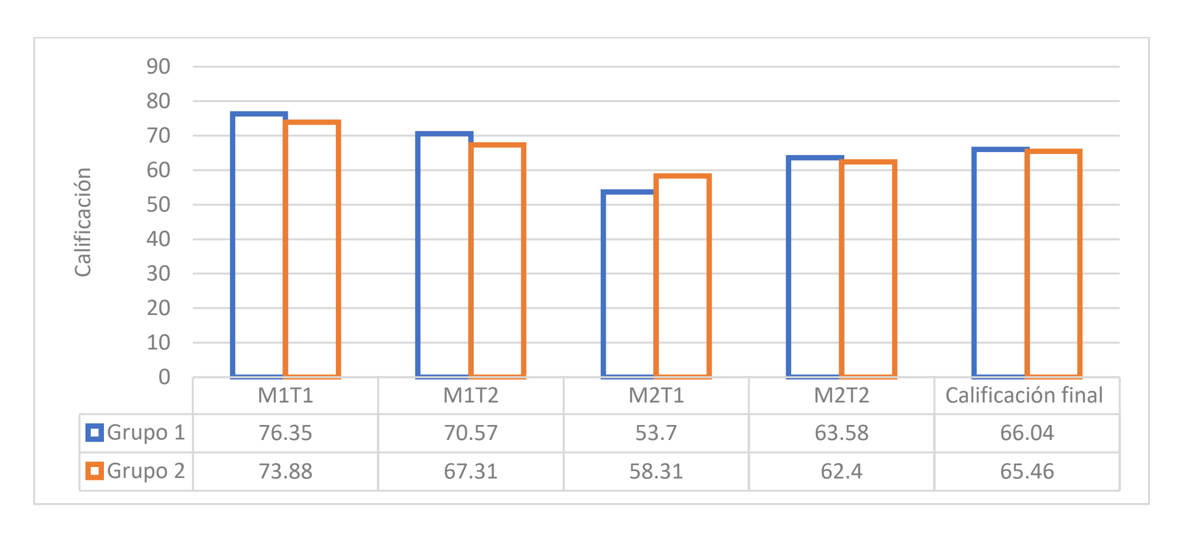
El 52.94% de los alumnos del grupo 1 convirtieron al registro gráfico su respuesta, la cual obtuvieron usando un registro diferente a este, en el grupo 2 el 48% de los estudiantes hicieron lo mismo, para llegar al 50% del total de los estudiantes.

Ahora bien, el 17.64% y el 20% de los alumnos de los grupos 1 y 2, respectivamente fueron capaces de plantear un método usando el registro algebraico a partir del registro discursivo utilizado para plantear el problema. En otras palabras, el 19.04% de los estudiantes utilizaron una conversión de registros para proponer una desigualdad que les ayudará a contestar el problema de manera algebraica.

En el grupo 1 sucedió, además, las siguientes tres observaciones, el 17.64% de los alumnos no lograron interpretar sus respuestas en el contexto del problema, ya que al expresar el resultado mencionan, de manera simbólica (con uso de intervalos), que las bolsas de nuez pueden llegar a pesar cualquier número real menor que cero, lo que nos llevaría a tener un costal con un peso negativo. Asimismo, el 23.52% de los estudiantes tienen errores al aplicar la ley de tricotomía expresada de manera algebraica, es decir no respetan el orden que llevan los números reales ya que en sus respuestas mencionaban que 5 era mayor o igual que 50 y que 1 es mayor o igual que 13, lo

cual puede suponer una confusión entre el significado de los signos "mayor que" y "menor que" (>, <). El tercer acontecimiento es que 35.29% presentó problemas con la interpretación de lo que el problema pedía resolver, es decir, hubo conflicto desde el registro discursivo que estaba involucrado en el planteamiento del problema ya que daban respuestas a cuántos costales eran necesarios para trasladar cierta cantidad de nuez cuando lo que se preguntaba era el peso máximo de cada costal para que no generara pérdidas al momento de transportarlo en avión.

Finalmente, el promedio de las cuatro tareas de la secuencia es reprobatoria en ambos grupos, el grupo 1 alcanzó un puntaje de 66.04 mientras que el grupo 2 se quedó en 65.46. Se muestra una comparación de las calificaciones obtenidas en la Gráfica 1, donde en el eje horizontal se presenta las cuatro actividades que constituían la secuencia, donde M es de Momento y T de Tarea, el color azul es para el primer grupo y el naranja para el segundo. Además, se muestra las calificaciones grupales finales. Cabe recordar en el TecNM la mínima aprobatoria es 70.



	M1T1	M1T2	M2T1	M2T2	Calificación final
Grupo 1	76.35	70.57	53.7	63.58	66.04
Grupo 2	73.88	67.31	58.31	62.4	65.46

Figura 3: Comparación de calificaciones obtenidas en los grupos de estudio.

Fuente: Elaboración propia.

6. Discusión.

La primera pregunta de investigación decía *¿Cómo resuelven los alumnos problemas que impliquen un cambio de registro del discursivo al gráfico y/o algebraico?*, la cual, al analizar los resultados y la experiencia de la implementación de la secuencia muestran que los alumnos resuelven los problemas que se presentaron en el registro que ellos se sentían más cómodos, siendo los más socorridos el simbólico (operaciones básicas) y el discursivo apoyado con el uso de operaciones básicas, para posteriormente, convertir la respuesta a un registro gráfico y/o algebraico. De acuerdo con la teoría de Duval (2006) esto, se debe a que algunos procesos son más fáciles en unos registros que en otros debido a la complejidad del tema y de la habilidad de los estudiantes para manejarse en ellos.

La segunda pregunta fue *¿En qué tipo de registro se desenvuelven mayormente los alumnos?* El cuál es el registro simbólico, debido al uso de operaciones básicas en la mayoría de la solución a los problemas, así también el registro discursivo fue usado en gran medida quedando como el segundo más usado. Se esperaba que al ser alumnos de nivel superior fueran capaces de plantear un sistema algebraico (inecuación) para resolverla, empero no fue así, fue muy poca la cantidad de estudiantes en general que logró cuando menos expresar su respuesta en términos algebraicos y aún más pocos

los que fueron capaces de convertir del registro discursivo al algebraico. Esto comparado con los resultados de Prada-Núñez (2017) indica que el registro en el que más se desenvuelvan los estudiantes es debido a la familiaridad que tienen con el registro pero remarca que eso no implica que lo dominen a la perfección, o lo conozcan a profundidad, ya que a pesar de ser problemas que permitían resolverse sin la necesidad de plantear una desigualdad de manera algebraica los resultados de la secuencia en los dos grupos no alcanzan la calificación mínima aprobatoria para el TecNM.

Y por último nos preguntamos *¿Qué tipos de problemas se debe elegir para desarrollar el interés de los alumnos y favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos? "*Se distingue la existencia de diferencias marcadas en la construcción de conceptos, ello depende de si se trata de una perspectiva ligada a la vida cotidiana y de otra que elige como punto de vista el concepto matemático" (Prada-Núñez, 2017, p. 36). Por lo tanto se percibe una diferenciación entre la forma en la que se adquieran los conceptos matemáticos si se liga a experiencias o situaciones contextualizadas, como en este caso a los nogales, un árbol característico del lugar donde se realizó la investigación, a si sólo se hubiera presentado como una clase tradicional o sin mostrar aplicaciones o situaciones donde se puede utilizar una desigualdad para resolverla. Por lo tanto, se debe priorizar el uso de situaciones ligadas a la vida de los estudiantes para incentivar la adquisición de conocimientos matemáticos.

7. Conclusiones

Se presentan conclusiones derivadas de la aplicación de la secuencia y la consecución de los objetivos propuestos. Como objetivo general se tenía *Identificar la habilidad de los estudiantes de nuevo ingreso al TecNM/ITCdJ para resolver problemas de desigualdades de manera algebraica a través de una secuencia didáctica*, el cual se percató que los estudiantes no se desenvuelven en mayor medida en el registro algebraico, es decir, no se puede estimar su habilidad debido a que no podemos afirmar o negar que esto se debió a su falta de habilidades algebraicas o a su comodidad de manejarse en un registro simbólico, pero esto puede ocasionar dificultades durante el transcurso de su formación matemática ya que en la materia de cálculo es un registro muy usado, y ellos, al ser ingenieros en formación llevan más materias de cálculo (integral, vectorial, ecuaciones diferenciales) por lo que el uso de desigualdades de manera algebraica podría ayudar a un mejor entendimiento de este y otros temas de cálculo (Cuevas, 2014) necesarios para su formación como ingenieros.

Como objetivos específicos se tenían dos. El primero de ellos constaba en *Identificar los errores más comunes que se presentan en la resolución de problemas entre los estudiantes*, lo que se encontró fue que presentan confusión con la ley de tricotomía ya que en tres de las cuatro tareas se presentaron expresiones que carecen de sentido matemático, así como confusiones en la interpretación de su respuesta, esto nos lleva a pensar que se debe a la falta de reflexión y análisis de lo que está haciendo el alumno y sólo mecaniza su procedimiento sin llegar a interpretar los resultados que se obtienen dentro del contexto del problema.

Por último, se pretendía *Generar estrategias para subsanar las deficiencias en el manejo del lenguaje algebraico en los alumnos del TecNM/ITCdJ*, para ello se propone que en el curso propedéutico que se imparte durante dos semanas a los alumnos de nuevo ingreso además de que dedique algún tiempo al repaso del lenguaje algebraico, i.e., que sean capaces de convertir de un

registro diferente al registro algebraico también, en medida de lo posible, sea más extenso las sesiones o la duración del mismo.

Otra posible medida sería un repaso breve durante las materias de cálculo de los contenidos imprescindibles para el desarrollo efectivo de la misma.

8. Referencias

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *6*(3), 199-219.

Bazzini, L. (1999). Disequazoni: il ruolo del segno. En J.Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII. VOL. III*, (pp. 7-12). Nice, France: IREM.

Borello M. (2010). Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico. Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/borello_2010.pdf

Brousseau, G. (2000), "Educación y didáctica de las matemáticas", Educación Matemática, México, Iberoamérica, *12*(1), 5-38.

Coll, C. (2001). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y del aprendizaje. En: C. Coll, J. Palacios, A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación. Psicología de la educación escolar* (pp. 157-188). Madrid: Alianza.

Cuevas, C. A., Rodríguez, A., & González, O. (2014). Un acercamiento funcional a la resolución de desigualdades matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 235-243. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. Annales de didactique et sciences cognitive, Vol. 8. IREM Strasbourg. (273-292)

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Freudenthal. H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V.

Prada-Nuñez, R., Hernández-Suarez, C. y Jaimes, L. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *Panorama, 11*(20), 34-44.

Robayna, M. M. S. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. In *Actas del III SEIEM: Valladolid, 1999*(pp. 261-282). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Salinas Muñoz, M. (2010). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. (Reseña) Revista Q, 3 (7), 4, julio - diciembre. Disponible en: http://revistaq.upb.edu.co

Tecnológico Nacional de México. (2015). Manual de Lineamientos Académico-Administrativos del Tecnológico Nacional de México. Obtenido de http://www.tecnm.mx/images/areas/docencia01/Libre_para_descarga/Manual_Lineamientos_TecNM_2015/Manual_de_Lineamientos_TecNM.pdf

Tecnológico Nacional de México. (2016). AC001 Cálculo Diferencial. 2018, de TecNM: ITCdJ. Disponible en: http://andromeda.itchihuahua.edu.mx/file.php/71/Plan_2010_nuevo/Asignaturas%20Comunes/AC001%20Calculo%20Diferencial.pdf

CONCEPTUALIZACIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL A PARTIR DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

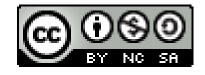
El Cálculo y su Enseñanza.
Enseñanza de las Ciencias y la Matemática
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Luis Carlos Rojas Flórez[1]
Hugo Rogelio Mejía Velasco[2]
Pedro Vicente Esteban Duarte[3] [1]

Recibido: 01 de mayo de 2019,
Aceptado: 12 de junio de 2019

Autor de Correspondencia:

Luis Carlos Rojas Flores
luis.rojas@cinvestav.mx



Resumen. Se plantea una propuesta basada en una secuencia instruccional de actividades, articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra, para el aprendizaje de la noción de pendiente de una recta en el espacio, como prerrequisito para la conceptualización de la derivada direccional. El diseño de las actividades se centra en presentar dinámica y explícitamente los elementos conceptuales inmersos en esta noción, como vector posición, dirección y las variaciones horizontales y verticales en el plano y en el espacio. Se prueba en un grupo de 10 estudiantes de ingeniería que recién se inician en el estudio del cálculo multivariante. En vista del contenido tecnológico utilizado, se escogió como marco de referencia para el análisis de los resultados, el Enfoque Instrumental. Los resultados muestran que presentar explícita y de manera gráfica este concepto, junto a elementos dinámicos que permitan explorarlo desde diferentes perspectivas, favorece el entendimiento y conceptualización de la derivada en el espacio.

Palabras clave: Vector posición y dirección, variaciones en el espacio, pendiente en el espacio, derivada direccional, enfoque instrumental.

Abstract. A proposal was planned based on an instructional sequence of activities, articulated with two- and three-dimensional dynamic objects created using the GeoGebra software, for the learning of the notion of a slope on a straight line in space, as a pre-requirement for the understanding of the concept of directional derivative. The design of the activities is centered on presenting in a dynamically and explicitly the conceptual elements immersed in this notion, like vector position, direction, and horizontal and vertical variations on the plane and on space. A group consisting of 10

[1] *Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del I.P.N/ CINVESTAV/México/ Correo: luis.rojas@cinvestav.mx*
[2] *Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del I.P.N/ CINVESTAV/México/ Correo: hmejia@cinvestav.mx*
[3] *Universidad EAFIT /Colombia/ Correo: pesteban@eafit.edu.co*

students who recently began their studies of multivariate calculus is tested. Taking in consideration the technological concept used, the Instrumental Approach was chosen as framework for the results analysis. The results show that presenting in an explicit and graphic way this concept, along with dynamic elements that enable exploring it from different perspectives, encourages the understanding and conceptualization of the derivative on space.

Keywords: Vector position and direction, variations on space, slope on space, directional derivative, instrumental approach.

1. Introducción

La derivada direccional es un concepto de vital importancia en las carreras de ingeniería a nivel universitario. Esta noción que involucra y se deriva de la pendiente de una recta en el espacio, provee de herramientas conceptuales al estudiante que debe utilizar en problemas, situaciones o construcciones de nuevos conocimientos que se le presentan durante el transcurso de su carrera universitaria. A pesar de esto, y a diferencia del cálculo diferencial en una variable donde existen gran cantidad de literatura en torno a propuestas de enseñanza y de aprendizaje, de la derivada (Depool, 2005; Sánchez, García, y Linares, 2008; Barragués, Morais, Juncal, y Guisasola, 2013) son pocas las publicaciones en educación matemática que se han ocupado específicamente de la comprensión de este concepto.

En este sentido, la enseñanza y el aprendizaje de la derivada direccional para funciones de dos variables, difiere en muchos aspectos de la derivada para funciones de una variable, esto se puede ver reflejado en los libros de textos que con mayor frecuencia utilizan los maestros y alumnos como guía en el aula de clase. Por ejemplo, para el cálculo de funciones de una variable, antes de introducir la noción de la derivada, se presentan de manera explícita elementos asociados al concepto de pendiente de una recta, incluyendo registros gráficos, algebraicos y numéricos, que posteriormente se utilizan para su conceptualización. A diferencia de esto, para funciones de dos variables no se incluye este contenido temático, la primera discusión del concepto de pendiente en el espacio, se presenta con la introducción de las derivadas parciales. Dicho de otra manera, no se tiene en cuenta la noción de pendiente de una recta para conceptualizar la definición de la derivada direccional como el límite de incrementos para una función de una variable, y mucho menos la noción de pendiente de una recta sobre un plano no vertical, para conceptualizar el teorema que relaciona el operador gradiente y un vector unitario con la derivada direccional. No es claro el porqué de esta decisión; no obstante, la naturaleza de la presentación de este concepto en los libros de texto, sugiere que los autores consideran que los estudiantes pueden extender de manera natural el concepto de pendiente de dos a tres dimensiones y, en consecuencia, no es necesario presentarlo explícitamente (McGee y Moore, 2015), algo que en la realidad no ocurre.

Quizás por lo anterior, usualmente el énfasis en su enseñanza se centra en el desarrollo de procedimientos algebraicos, sin que se llegue a evidenciar la dinámica del cambio que involucra el pensamiento variacional del concepto pendiente en el espacio. En este sentido Martínez-Planell et al. (2015) establecen que, "La idea de la derivada direccional es difícil para la mayoría de los estudiantes y necesitan ayuda para entender incluso las nociones más elementales…carecen de una comprensión geométrica de los componentes fundamentales implicados en la definición de una derivada direccional. (p. 361)", de igual modo, McGee et al. (2015), hacen énfasis en esta misma problemática e indican que, cuando no se presentan registros semióticos asociados al concepto de pendiente antes de introducir la derivada en el espacio, se presentan dificultades en su entendimiento. Por ello sugieren que, "Si la pendiente en 3D no se presenta explícitamente, los estudiantes luchan con las conversiones asociadas con la pendiente en 3D; por ello, tienen un éxito muy limitado con los tratamientos y conversiones asociadas a la derivada en el espacio. (p.25)".

En resumen, podemos establecer que la problemática de enseñanza y de aprendizaje de la derivada direccional para funciones de dos variables, recae en gran parte en la comprensión geométrica de la noción de pendiente de una recta en el espacio. Por ello, creemos que antes de introducir la noción de la derivada direccional, se debe ayudar a los estudiantes a construir geométricamente una concepción sólida de la noción de pendiente de una recta en dos dimensiones (sobre el plano bidimensional xy) a partir de los procesos variacionales (cambios verticales y horizontales); y luego, trasladar estas mismas ideas a una recta y a un plano en el espacio, que posibilite posteriormente un descubrimiento y conceptualización gradual de la derivada direccional.

Dicho esto, nuestra propuesta se basó en una serie de actividades de aprendizaje, articulada con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra, que tenían como objetivo ayudar a los estudiantes a construir una concepción geométrica sólida de la noción de pendiente de una recta en el espacio, que sirviera de puente para la conceptualización de la derivada direccional como el teorema que la relaciona con el operador gradiente. Así, en este artículo exponemos algunos resultados de esta propuesta, detallaremos dos de las actividades de la secuencia instruccional, la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes, y la manera como solventan las dificultades de comprensión de la noción de pendiente en el espacio en interacción con los elementos gráficos, geométricos y textuales de cada uno de los objetos.

Por otro lado, en vista del componente tecnológico utilizado, para el análisis de los datos derivados de la aplicación metodológica, resultó necesario contar con un enfoque teórico que tuviera en cuenta el carácter no trivial del uso de la tecnología como instrumento de aprendizaje. Por esta razón, seleccionamos como marco de teórico de referencia, para el análisis de la información recolectada, el Enfoque Instrumental (este enfoque se analizará en la siguiente sección).

2. El enfoque instrumental

El énfasis del enfoque instrumental recae en la actividad humana que, en su intento de proporcionar una matemática funcional y más asequible, incorpora un **artefacto** tecnológico digital para la resolución de una tarea. Este artefacto no es siempre un objeto material en su conjunto, por ejemplo, un módulo de cálculo simbólico de un software puede verse como un artefacto, e inclusive una representación dinámica o estática realizada con el mismo software. Sin embargo, un artefacto en desuso no es más que una herramienta desprovista de significado,

es la persona o el sujeto quien a través de la interacción con este o en ocasiones con la ayuda de alguien, debe vislumbrar la intencionalidad para el cual fue construido, percibir su propósito y finalidad.

Es precisamente a través del uso del artefacto, cuando la persona desarrolla medios que le permiten descubrir la manera en que éste potencia sus capacidades para el tipo de tarea o actividad para el cual fue diseñado. Este proceso de interacción requiere que la persona desarrolle esquemas mentales en el sentido de Vergnaud[2], que involucran habilidades en el uso del artefacto y conocimiento del contexto (en nuestro caso matemático) en las que el artefacto es útil. Es precisamente aquí, donde el artefacto que, en nuestro caso son objetos dinámicos, se convierte en un **instrumento** que media la actividad para el cual fue diseñado.

En este sentido, Rabardel (2002) introduce la noción de **esquema de utilización**, que describe como un esquema que organiza la actividad con un artefacto asociado con la realización de una tarea dada. Distingue entre dos tipos de esquemas de utilización: **esquemas de uso**, que están orientados al manejo técnico sobre el artefacto, se enfocan en tareas secundarias correspondiente a acciones específicas relacionadas directamente con su uso (por ejemplo: activación de una calculadora, ajuste del contraste de pantalla, ajustes de zoom, ajustes gráficos, etc.) y **esquemas de acción instrumentados**, que consisten en las estrategias que derivan de la acción global sobre el artefacto; se pueden considerar como un conjunto de esquemas de uso que conducen a la realización de una tarea específica sobre el objeto en actividad, por ejemplo: cálculo de pendientes, del límite de una función, una derivada, interpretación geométrica de un concepto, etc.. Estos esquemas no son visibles, pero puede hacerse una reconstrucción a partir de las evidencias elaboradas por el sujeto al momento de realizar la tarea. Estas evidencias llamadas **técnicas de acción instrumentadas**, es la parte observable de un esquema de acción instrumentado, y están conformados por un conjunto justificado de elementos matemáticos; en nuestro caso, evidencias en papel y lápiz, diálogos entre estudiantes, diálogos entre estudiantes y profesor, discusiones grupales, y otros, derivados de la interacción con los objetos.

Como hemos tratado de mostrar, el proceso de convertir un artefacto (objetos dinámicos) en un instrumento en manos de un sujeto es un proceso que está lejos de ser trivial, requiere tiempo y esfuerzo por parte de estudiantes y docentes, que implica un descubrimiento progresivo de las propiedades y características del artefacto. Drijvers y Trouche (2008) llaman a este proceso **la génesis instrumental**, e indican que es un proceso de apropiación, que permite que el artefacto medie la actividad matemática. Por otra parte, la elaboración de un instrumento por parte de un sujeto es un proceso que implica dos sentidos. Por un lado, está el proceso de **instrumentalización**, que está ligado al desarrollo de esquemas de uso orientados a la gestión técnica sobre el artefacto, se enfocan en tareas secundarias correspondientes a acciones específicas sobre el objeto. Este proceso puede estudiarse tanto desde el punto de vista de la estructura del artefacto, como del plano de su funcionamiento. En nuestro estudio, la instrumentalización se limita a esta última, en el sentido que el diseño de cada uno de los objetos está delimitado de manera tal, que los estudiantes no pueden modificar su diseño, más que con el ingreso de puntos, funciones, arrastre de elementos geométricos, zoom sobre vistas gráficas, y otros.

Vergnaud define un esquema como "una organización invariante de la conducta para una clase dada de situaciones." (Vergnaud, 2009, p. 88).

Por otro lado, está el proceso de **instrumentación**, que está ligado al desarrollo de esquemas de acción instrumentadas. Es aquí, donde las limitaciones y potencialidades técnicas y visuales del artefacto, conforman las formas de uso y comprensión conceptual que el sujeto puede adquirir a partir de la interacción con este. En este proceso el artefacto forma el pensamiento del usuario, e implica la organización de estrategias para la resolución de un problema. Para Trouche (2004) es precisamente en este proceso en el cual el artefacto imprime su marca en el sujeto, es decir, le permite desarrollar una actividad dentro de ciertos límites.

3. Pendiente de una recta en el espacio, noción fundamental para la conceptualización de la Derivada Direccional.

La enseñanza y el aprendizaje de la derivada direccional, es una tarea que se considera bastante difícil. Su comprensión demanda la articulación de distintos conceptos en dos y tres dimensiones, que requieren la presentación de distintos registros e interpretaciones geométricas, que involucran relacionar cambios o incrementos variacionales en el espacio, que están ligadas a la noción de pendiente de una recta en el espacio.

De hecho, para conceptualizar la definición de la derivada direccional como el límite de una función de una variable[3], se debe tener claro la noción de traza, vector posición y dirección sobre el plano bidimensional xy, y el de pendiente de una recta secante en el espacio, lo que implica tener una imagen geométrica clara de los procesos variacionales en el espacio. A partir de ello, se debe efectuar un procedimiento de acercamientos análogo al realizado para funciones en una variable (ver Figura 1), para aproximar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en un punto dado P de su dominio, en dirección de un vector unitario u, a través de la pendiente de la recta secante.

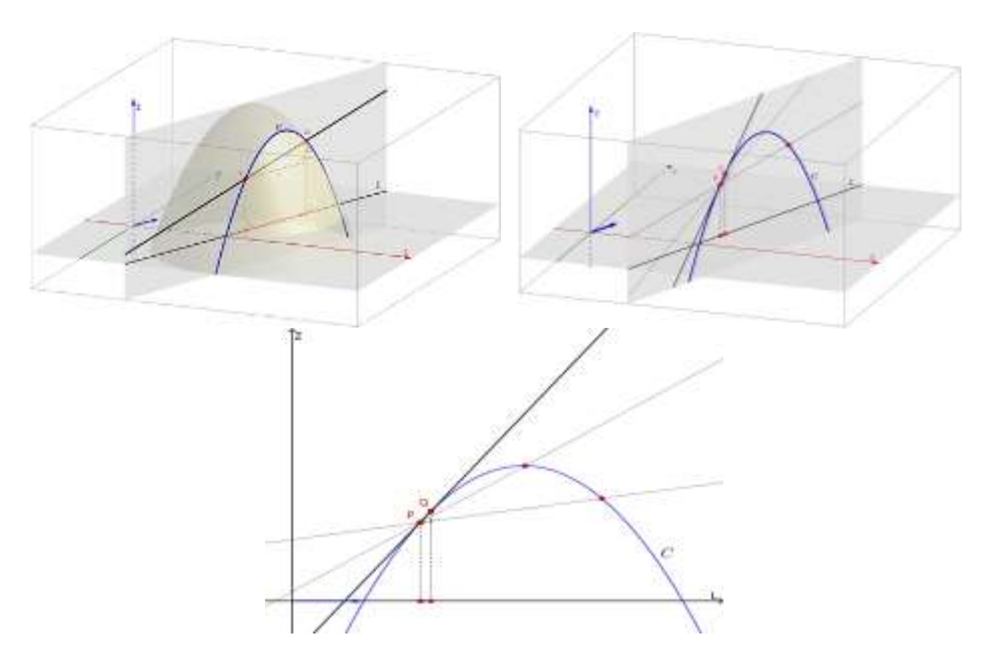


Figura 1: Aproximación a la pendiente de la recta tangente a una función $z = f(x, y)$.

En otros términos, la definición de la derivada direccional como un límite de una función de una variable, se puede ver como una extensión natural de la derivada para funciones de una

[3] $D_u f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + sen\,\theta) - f(x,y)}{t}$, donde $u = \cos\theta i + sen\,\theta j$.

variable; puesto que las rectas secantes y tangentes son rectas contenidas en el espacio bidimensional lz, donde l corresponde al eje dado por la intersección del plano vertical con el plano xy, como se observa en la Figura 1. Lo que no es claro, y que no se presenta en los libros de texto, es la construcción geométrica del teorema que relaciona el gradiente con la derivada direccional. De hecho, para conceptualizar y comprender este teorema como la pendiente de una recta tangente en un punto dado $P(x, y)$, a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ como: $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$, donde $\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle$, siendo f_x y f_y las derivadas parciales, y u un vector dirección unitario; implica tener claro fundamentalmente el significado geométrico de la pendiente de una recta en el espacio, que permita asociarlo con otros como, funciones de dos variables, pendiente de un plano no vertical en el espacio, plano y recta tangente, entre otros. Mas aún, para conceptualizar este teorema, hay que reconocer e interpretar gráfica y geométricamente cada una de estas nociones. Por ejemplo, se debe identificar que un plano tangente sobre la gráfica de una función $f(x, y)$ diferenciable en un punto P de su dominio, contiene infinitas rectas tangentes a f en P, además, reconocer el vector dirección $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$ en el cual se desea determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, así mismo, identificar las variaciones horizontales Δ_x y Δ_y, y verticales Δz_x y Δz_y, sobre un plano tangente en dirección de los ejes coordenados x e y respectivamente, y con base en ello, establecer las pendientes de las rectas tangentes contenidas en el plano tangente en estas mismas direcciones, como el cociente que relaciona la variación vertical y la horizontal, esto es, $m_x = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ y $m_y = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}$, respectivamente, como se muestra en la Figura 2.

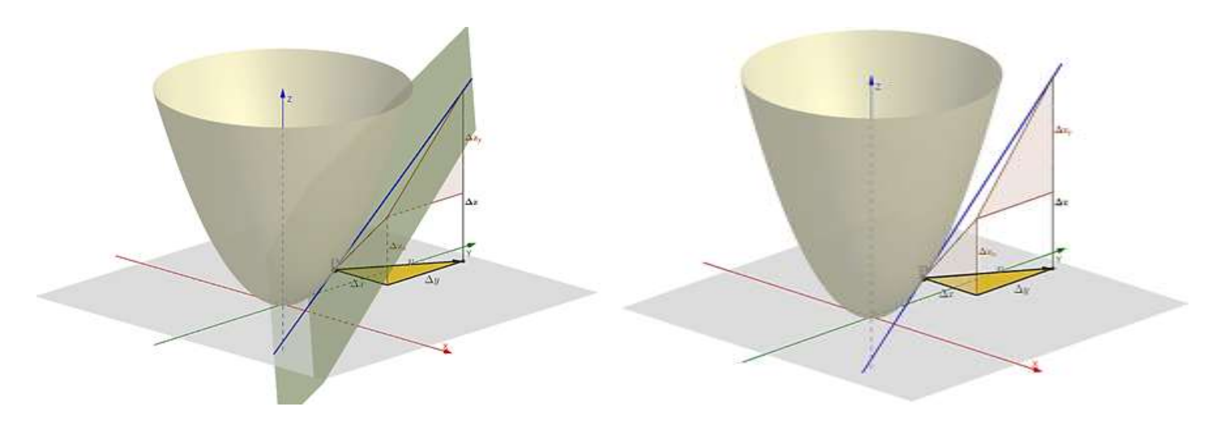


Figura 2: Elementos geométricos presentes en el teorema de la derivada direccional.

Posterior a ello, inferir la expresión que representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en P en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, como un cociente que relaciona la variación vertical total Δz con la variación horizontal[4], (longitud o norma del vector dirección), es decir, como $m = \frac{\Delta z}{\|v\|}$, identificando que esta pendiente puede expresarse como:

$$m_{\langle \Delta x, \Delta y \rangle} = \frac{m_x \Delta x + m_y \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = D_v f(x,y) = \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Expresión que representa la derivada direccional, y que al considerar un vector unitario u en la misma dirección del vector v, se reduce al teorema que se presenta en los libros de texto $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$, y que en forma general no se hace explícita.

Como se ha querido dar a entender, conceptualizar la derivada direccional para funciones de dos variables, demanda imperiosamente comprender geométricamente la noción de pendiente de una recta en el espacio y particularmente de una recta contenida en un plano, lo que implica construir una imagen clara de la noción de vector posición y dirección, y evidentemente de los procesos variacionales en el espacio, es decir los cambios o variaciones verticales y horizontales en dirección de los ejes coordenados x e y, y en otras direcciones. Por esta razón, nuestro estudio se basó principalmente en ayudar a los estudiantes a construir una concepción geométrica sólida de la noción de pendiente de una recta en el espacio, que les permitiera conceptualizar de una manera lógica la derivada direccional para funciones de dos variables, en particular del teorema que lo relaciona con el operador gradiente. Seguidamente se expondrá el método utilizado para dicha tarea y, posteriormente los resultados y conclusiones derivados de la aplicación metodológica.

4. El método

En este estudio planteamos una secuencia instruccional de actividades que integraba objetos dinámicos creados con el software GeoGebra en dos y tres dimensiones, dirigidas y estructuradas en torno a la compresión geométrica de la pendiente de una recta en el espacio, como prerrequisito para la conceptualización derivada direccional. Esta secuencia consistió en 6 actividades que se entrelazaban entre sí en todo momento, estas fueron: pendiente de una recta en dos dimensiones, vector posición y longitud de un vector sobre el plano bidimensional xy, pendiente de una recta en el espacio, pendiente de una recta sobre un plano no vertical, plano tangente y conceptualización de la derivada direccional como $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$.

Las actividades integraban por lo menos una pregunta a hacer resuelta en interacción con los objetos. El diseño de estos, se enmarco en tres diferentes tipos de acuerdo con la temática que se deseaba abordar y el aprendizaje que se deseaba adquirir. Se diseñaron objetos para operar y comparar, objetos para afianzar conceptos, y objetos para validar definiciones o teoremas. Todos y cada uno de ellos, incorporaban vistas en dos y tres dimensiones que presentaban componentes dinámicos gráficos, numéricos y textuales, para el uso de los estudiantes en la exploración de los conceptos, por ejemplo: movimientos o arrastres, de puntos, de rectas, de vectores, planos, segmentos, realizar zoom sobre los objetos, casillas para ingresar funciones, respuestas a las actividades, cuadros que incluían información textual, geométrica, numérica y algebraica, que se actualizaban de manera automática al manipular los distintos elementos del objeto, entre otros.

[4] A diferencia del caso de una variable, la variación horizontal en el espacio no produce un número, produce un vector.

Por otro lado, la experiencia se propuso a un grupo de 31 estudiantes de cuarto semestre de ingeniería, que recién se iniciaban en la asignatura de cálculo en varias variables, de los cuales 10 de ellos en forma voluntaria aceptaron participar de la investigación. En principio se les aplicó una entrevista de conocimientos previos, referente a la noción de pendiente de una recta en el espacio. Los resultados de esta entrevista coincidieron con los presentados por los autores citados en la introducción de este artículo, que en forma general apuntan a las dificultades que presentan los estudiantes en extender la noción de pendiente de dos a tres dimensiones, lo que dificulta el entendimiento conceptual de la derivada direccional.

En este artículo nos centraremos en dos de las actividades que consideramos esquematizan la secuencia de actividades, y forman los conceptos base para la conceptualización de la derivada direccional, en particular del teorema que la relaciona con el operador gradiente. Estas son, pendiente de una recta en el espacio y, pendiente de una recta sobre un plano no vertical. Junto a cada una de estas, se expondrán algunos de los resultados obtenidos y un análisis situado en nuestro marco teórico de referencia, el enfoque instrumental.

5. Resultados y análisis

A continuación, narraremos algunos resultados derivados de la aplicación de las dos actividades mencionadas anteriormente. Vale la pena mencionar que estas actividades fueron videograbadas utilizando un software que permitía capturar todo lo que aparecía en la pantalla del ordenador en forma de video, y el audio de la, o las personas que se encontraban frente a éste.

5.1 Pendiente de una recta en el espacio

Esta práctica se dividió en dos secciones, la primera hacía referencia a la dirección de una recta en el espacio, y la segunda al valor de su pendiente. En esta última se presentaron dos preguntas, la primera de ellas concerniente al signo de la pendiente de la recta y la segunda a su valor numérico. Seguidamente se narran algunos episodios de lo acontecido en esta actividad.

Iniciada la actividad, el docente propone considerar una nueva recta que pasa por los puntos $A = (1,1,2)$ y $B = (5,4,2)$, los estudiantes ingresan estos puntos en el objeto y mencionan: “El vector dirección sobre xy (plano bidimensional xy) sería, cinco menos uno cuatro, y cuatro menos uno, sería tres, $v = \langle 5-1, 4-1\rangle = \langle 4,3\rangle$,.., ahora miremos el signo de la recta,.., la pendiente es positiva”, responde su compañera de trabajo “no, no es positiva,…, ¿no es cero?”, En este instante comienza a manipular la vista gráfica y menciona “Si tú la miras acá, en z están a la misma altura, está en dos” la compañera se percata de esta situación y le responde: “Tienes razón, es cero, por tanto su pendiente también es cero”. Esto nos indicó que el elemento visual del objeto indujo la respuesta de los estudiantes, la posibilidad de ver desde diferentes perspectivas los elementos geométricos, los ayudo a percatarse que los puntos por donde pasaba la recta tenían la misma altura, esto les facilitó ajustar la percepción del signo de la pendiente de la recta. Dicho de otra manera, desarrollaron un esquema de acción instrumentada (identificar el signo de la pendiente de la recta) a partir de un esquema de uso (manipular la vista 3D) ver Figura 3.

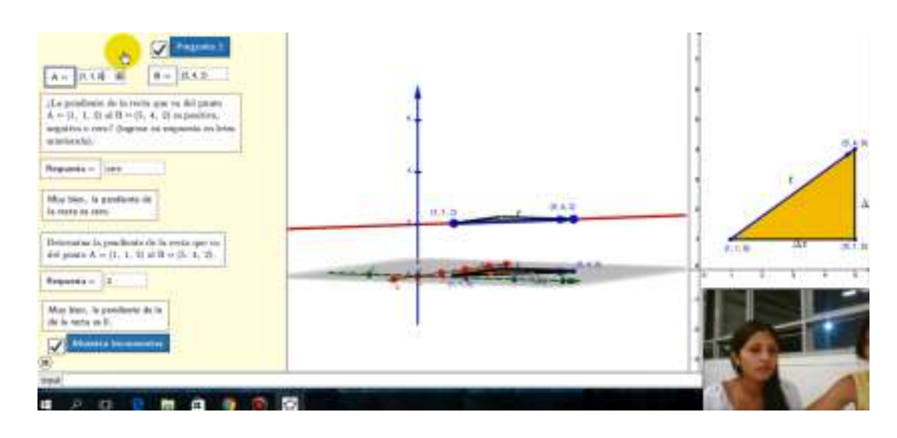


Figura 3. Solución a la actividad recta con pendiente cero.

Sigue la actividad, pero en esta ocasión los estudiantes ingresan los puntos los puntos $A = (1,0,1)$ y $B = (5,4,3)$, luego una estudiante menciona: "Entonces la dirección sería cabeza menos cola cuatro menos cero y, cinco menos uno, ósea cuatro coma cuatro ($v = \langle 4,4 \rangle$)" respuesta que resulta correcta, "Ahora la pregunta dos,…, la recta es positiva, mira que este es el punto A y este el punto B, está creciendo". En este episodio, la estudiante señalando en la pantalla, muestra a su compañera la dirección de recta (vector dirección sobre el plano xy), esto nos indicó que la imagen presentada en el objeto facilitó la interpretación del signo de la pendiente de la recta, lo que refleja un esquema de acción instrumenta.

Continua el dialogo, mencionando: "Entonces la pendiente sería,…, la variación de z que sería tres menos uno, sobre la raíz de la variación de x al cuadrado más la variación de y al cuadrado,…, cinco menos uno al cuadrado, más cuatro menos cero al cuadrado,…, entonces eso es igual a dos, sobre la raíz de dieciséis, más dieciséis,.., ósea dos sobre la raíz de treinta y dos", ingresan la respuesta en la casilla de entrada, siendo esta correcta ver Figura 4. Lo ocurrido en este episodio, confirmó la interiorización y movilización de los procesos variacionales del plano al espacio, en particular quedó claro que los estudiantes identificaron que la variación horizontal estaba dada por la magnitud del vector dirección representado sobre el plano xy, y además, que la variación vertical se determinaba realizando la diferencia entre las coordenadas z, de los puntos A y B, de acuerdo a la dirección del vector.

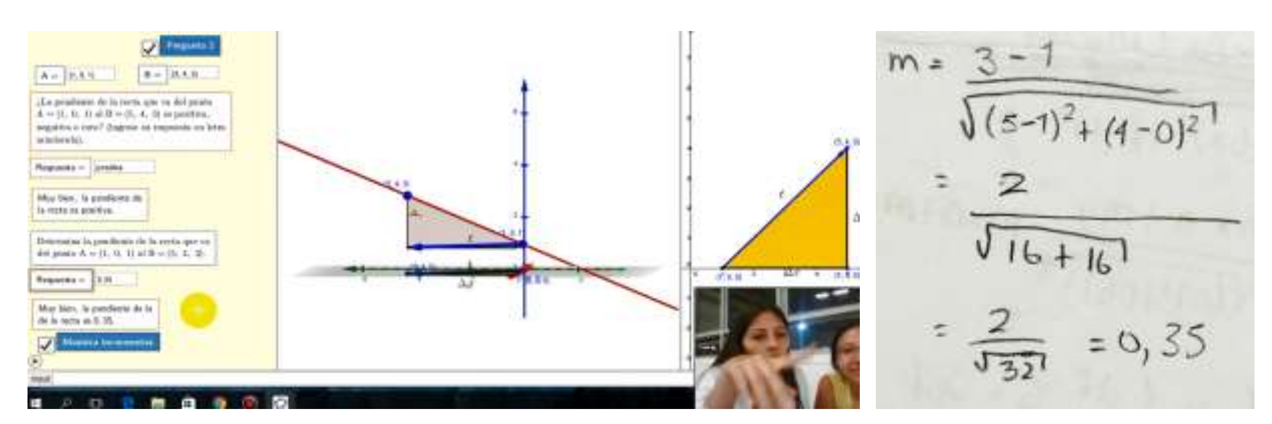


Figura 4. Solución a la actividad pendiente de una recta.

En forma general, las acciones realizadas por los estudiantes en esta actividad evidenciaron distintos esquemas de uso y de acción instrumentada que ayudaron a los estudiantes a dar un

significado geométrico de la noción de pendiente de una recta en el espacio. En particular se identificaron esquemas de uso relacionados con el manejo de gráficos al manipular la vista 3D, al activar o desactivar casillas de control para exponer u ocultar objetos, al ingresar puntos en el espacio, y otras actividades de uso intencionadas, que llevaron a los estudiantes a instrumentalizar el objeto, es decir, adaptarse a su funcionalidad.

Por otro lado, el conjunto de todas estas acciones llevó a los estudiantes a comparar y estudiar la manera de determinar la pendiente de una recta de dos y tres dimensiones. Esto se apreció principalmente en las explicaciones (esquemas de acción instrumentadas) dadas por los estudiantes; por ejemplo, que la variación horizontal estaba dada por la magnitud del vector dirección, que la asociaron con el teorema de Pitágoras (actividad 2, vector posición y longitud de un vector), y así mismo, cuando describieron la manera de determinar la variación vertical, como la diferencia entre las coordenadas z de los puntos A y B.

El anterior análisis refleja que los estudiantes utilizaron el objeto dinámico de manera idónea para la resolución de las actividades. En otras palabras, se evidenció el proceso de instrumentalización en torno a los esquemas de uso que desarrollaron los estudiantes respecto a la manera adecuada de utilización de los elementos que constituían el objeto. Por otro lado, la consecución exitosa de las actividades demandó en los estudiantes crear estrategias de carácter geométrico, algorítmicas y explicativas en cada uno de los pasos utilizados durante la solución de las actividades. Es decir, se evidenció el proceso de instrumentación a través del desarrollo de esquemas de acción instrumentados como los descritos en los episodios anteriormente expuestos, que adaptaron para dar solución a las actividades.

5.2 Pendiente de una recta sobre un plano

Esta actividad planteaba determinar la pendiente de una recta sobre un plano no vertical en dirección de los ejes coordenados x e y, y posteriormente en otras direcciones. Vale la pena mencionar que la dirección de la recta contenida en el plano, está determinada por un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, lo cual nos permite definir la pendiente del plano en esta misma dirección. De otro lado, inicialmente se esperaba que los estudiantes reconocieran la pendiente del plano en dirección de los ejes coordenados x e y como $m_x = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ y $m_y = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}$, y que estas coincidían con la pendiente de la recta en estas mismas direcciones; y luego, que utilizaran este hecho para conceptualizar la pendiente en cualquier otra dirección sobre el plano. Dicho esto, se pretendía que los estudiantes identificaran que el cambio vertical total Δz de la recta contenida en el plano en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, se podía determinar en términos de la suma de los cambios verticales sobre el plano, en las direcciones de los ejes de coordenados x e y, es decir $\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y$. Así mismo, se procuraba que el estudiante estableciera la expresión que representa la pendiente de la recta contenida en el plano, o lo que es lo mismo, la pendiente del plano en la dirección del vector v, como el cociente que relaciona la variación vertical total Δz con la variación horizontal (longitud del vector dirección v) es decir, $m_{\langle \Delta x, \Delta y \rangle} = \frac{\Delta z}{\|v\|} = \frac{\Delta z_x + \Delta z_y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$.

El docente inicialmente propuso determinar la pendiente del plano en dirección del eje x, mediante el vector $v = \langle 2,0 \rangle$. Los estudiantes comienzan la actividad generando un plano utilizando el botón “Generar plano”, ingresan un punto $P = (6,2,3)$, el vector dirección v. Posteriormente, giran la vista gráfica 3D y ocultan el plano utilizando la casilla de control

“Plano”, quedando expuesta únicamente la recta. Como se puede observar en la Figura 5, en el cuadro de texto en la vista izquierda, aparecen los incrementos verticales y horizontales Δz_x, Δz_y, Δx y Δy, y además su respectiva representación gráfica en las vistas 2D y 3D. Con base en estas consideraciones, los estudiantes mencionan: “Bueno, la pendiente es delta de z, sobre delta de x, ó sea ocho sobre dos”. De este diálogo y de lo realizado en pantalla por los estudiantes, se observó que identificaron que la pendiente de la recta coincidía con la pendiente del plano. Esto se evidenció cuando ocultaron el plano, dejando únicamente la recta contenida en este, lo que les facilitó asociar dichas pendientes. Además, se pudo establecer que se apoyaron en la vista gráfica 2D para asociar la dirección y longitud del vector con el incremento horizontal Δx. Estas acciones evidenciaron esquemas de uso que realizaron los estudiantes sobre el objeto; por ejemplo, utilizar el botón para generar planos, ingresar vectores, ocultar los incrementos, el plano y otros. Como también, esquemas de acción instrumentados que llevaron a la resolución de la actividad.

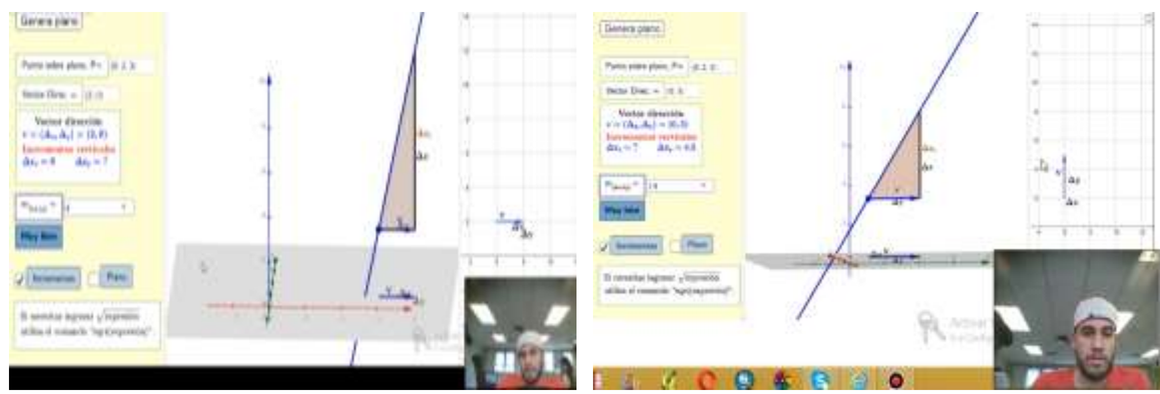


Figura 5. Pendniente del plano en dirección de los ejes x e y.

Luego, el docente propuso determinar la pendiente en dirección del eje y, mediante el vector $v = \langle 0{,}3 \rangle$, los estudiantes ingresan dicho vector, giran la vista gráfica 3D, esta queda apuntando al eje y, y resuelven la actividad sin ningún problema determinando dicha pendiente como $m = \frac{4.5}{3} = 1.5$, (ver Figura 5).

El siguiente problema, planteaba determinar la pendiente en una dirección diferente al eje x e y, en particular en dirección del vector $v = \langle 2{,}3 \rangle$, los estudiantes ingresaron dicho vector, giraron nuevamente la vista gráfica 3D, y mencionaron: “Sería delta de z,…, cuatro punto cinco, sobre raíz de delta de x, que sería dos,…, esto al cuadrado, más delta de y que es 3, esto al cuadrado, entonces quedaría,…,nueve veintiseisavos por raíz de trece, (racionalizan la expresión e ingresan $m = \frac{9}{26}\sqrt{13}$)”, respuesta que resultó incorrecta. En este último episodio se observó que los estudiantes tomaron como incremento vertical, el valor dado por Δz_y que correspondía a la variación vertical en dirección del eje y, que fue la utilizada en el anterior ejercicio, y no tomaron en consideración que la pendiente del plano que estaban determinando, no era en esta dirección. Los estudiantes al percatarse de que era incorrecta la solución dada, discuten sobre ello; luego, uno de los estudiantes señalando el gráfico le dice a su compañero: “Pero es que sería todo esto (señala el incremento vertical total Δz), …, pues ya no estamos con respecto a y, ni con respecto a x, estamos con todo esto completo (de nuevo señala con el mouse el incremento vertical total Δz)”. En este punto de la actividad, se observó que los estudiantes comenzaron a utilizar los elementos presentes en el objeto para iniciar la construcción geométrica de la expresión que representa la pendiente del plano en la dirección del vector $v =$

$\langle 2,3\rangle$ (esquemas de acción instrumentado). Continua la discusión, uno de los estudiantes mientras gira la vista 3D, establece: "Me imagino que es sumar,…, se suma este con este (señala los incrementos verticales en dirección de los ejes coordenados x e y, es decir Δz_x y Δz_y),…", su compañero de trabajo le pregunta, "¿será?", a lo que él responde: "Si, pues mira que esta distancia (señala con el mouse el incremento vertical total Δz) es esta (Δz_x) más esta otra (Δz_y),…, visualmente es lo que entiendo" (ver Figura 6).

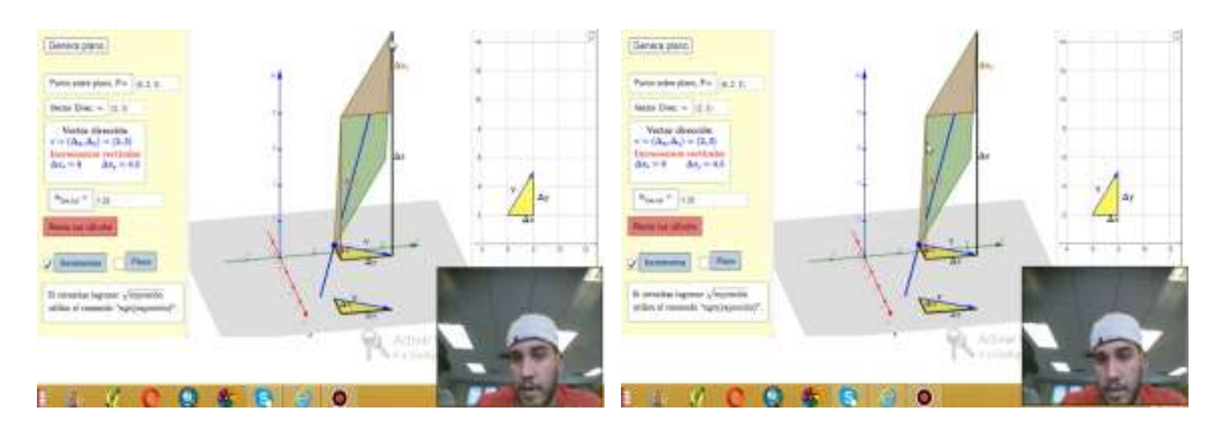


Figura 6. Interpretación geométrica del estudiante del incremento vertical total Δz.

Este episodio muestra claramente, que los estudiantes identificaron que la pendiente la recta coincidía con la pendiente del plano en dirección del vector v, y se valieron de este echo para establecer el valor del incremento vertical total Δz de la recta contenida en el plano, como la suma de los incrementos verticales sobre el plano en dirección de los ejes coordenados x e y. Lo anterior muestra un esquema de acción instrumentado que se originó mediante una discusión que giro en torno a la interpretación de los elementos presentes en el objeto; en particular de las variaciones verticales y horizontales en dirección de los ejes coordenados x e y sobre el plano. Posterior a ello, los estudiantes mencionan: "Entonces sería, veinticinco veintiseisavos, que multiplica a la raíz de trece (la respuesta la ingresan racionalizada, que es equivalente a $m = \frac{12.5}{\sqrt{13}}$)", respuesta que resulta correcta.

De manera general, los anteriores resultados reflejaron que los estudiantes utilizaron los conocimientos adquiridos de la actividad de pendiente de una recta en el espacio, para dar solución a esta última. Esta transición evidenciada en el desarrollo y movilización de esquemas de uso y de acción instrumentadas (esquemas de utilización), como los descritos durante el desarrollo de la actividad, nos permitió afirmar que, el estudio de la pendiente de una recta sobre un plano en el espacio, permitió a los estudiantes interactuar con diferentes aspectos técnicos y conceptuales, que llevaron a la resolución exitosa de la actividad. De hecho, la situación problémica que presentaron los estudiantes al determinar la variación vertical total Δz, los obligó a considerar la concepción geométrica de dicha variación, y a partir de ello, establecer una expresión algebraica para conceptualizar la noción de pendiente sobre un plano, objetivo principal que se planteó lograr con esta actividad.

Finalmente, para nosotros fue claro que el componente visual y dinámico fue un elemento clave en el éxito de las actividades. En particular, la oportunidad que tuvieron los estudiantes de observar las variaciones en el espacio, y el vector posición que se mostraba en la vista gráfica

2D y 3D, junto a la manipulación de la vista gráfica 3D del objeto, facilitó a los estudiantes identificar que la pendiente de la recta coincidía con la pendiente del plano. Esto les ayudo a interpretar las pendientes en dirección de los ejes coordenados x e y, como $m_x = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ y $m_y = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}$ respectivamente, y como $m = \frac{\Delta z}{\|v\|} = \frac{\Delta z_x + \Delta z_y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ para la pendiente en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, en otras palabras la derivada direccional para funciones lineales de dos variables (planos de la forma $z = f(x, y) = a_1 x + a_2 y$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$). Finalmente, considerando un plano tangente a una función diferenciable de dos variables en un punto $P(x_0, y_0)$ de su dominio como se muestra en la Figura 2, se extiende la derivada direccional para este tipo de funciones como:

$$D_v f(x_0, y_0) = \frac{f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Posteriormente considerando un vector unitario $u = \langle a, b \rangle$ en la misma dirección del vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$, el teorema que se presenta en los libros de texto como:

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b = \nabla f(x_0, y_0).u$$

Donde $\nabla f(x, y) = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \rangle$ es el operador gradiente y $u = \langle a, b \rangle$, un vector unitario. Cabe mencionar que, estas consideraciones no se presentan en los libros de texto que con mayor frecuencia utilizan docentes y alumnos en el aula de clase. Por esto, uno de objetivos fundamentales de esta investigación, fue mostrar a los estudiantes esta relación geométrica.

6. Conclusiones

Consideramos que el diseño gráfico y dinámico de los objetos, junto al orden presentado de las actividades, ayudó a promover un significado geométrico de las nociones base contenidas en la derivada direccional. Observamos que facilitó la coordinación y movilización de esquemas de utilización, que ayudó a los estudiantes a crear una imagen clara de la noción de pendiente de una recta, particularmente una imagen y un significado geométrico sólido de los procesos variacionales, que les simplifico la manera de extender esta noción del plano bidimensional xy, al espacio; primero sobre una recta y luego sobre una recta contenida en un plano.

Lo anterior subraya la importancia de presentar explícitamente los elementos conceptuales inscritos en la noción de la derivada direccional, como prerrequisitos necesarios para su conceptualización. Como la pendiente de una recta en el espacio y la pendiente de una recta sobre un plano, específicamente haciendo hincapié en los vectores dirección junto las variaciones horizontales y verticales, que permita a los estudiantes identificarlos y, relacionarlos utilizando distintas representaciones (gráfica, numérica, algebraica y verbal), que les ayude posteriormente a asociarlos para conceptualizar la noción de la derivada en el espacio.

Por otro lado, consideramos que la posibilidad que tuvieron los estudiantes de observar de manera dinámica el vector dirección, las variaciones de rectas y planos en el espacio, la oportunidad de ver el objeto desde diferentes perspectivas, sumado a las herramientas que permitían mostrar u ocultar elementos del objeto, y otras, fue un aspecto decisivo en el nivel de entendimiento y abstracción que lograron de la noción de pendiente de una recta en el espacio, que consideramos facilitó la interpretación y conceptualización geométrica de la derivada direccional.

7. Bibliografía

Barragués, J. I., Morais, A., Manterola, M. J., and Guisasola, J. (2013). Una propuesta de uso de un classroom response system (crs) para promover clases interactivas de cálculo en la universidad. *Educación matemática*, 25(1):63-109.

Depool, R. (2005). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (pcs). *Números. Revista de Didáctica de las* Matemáticas, 62:3-31.

Drijvers, P. and Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 2:363-391.

Martínez-Planell, R., Trigueros, M., and McGee, D. (2015). Student understanding of directional derivatives of functions of two variables. *In Proceedings of the 37th anual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. East Lansing, MI: Michigan State University*.

McGee, D. L. and Moore-Russo, D. (2015). Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students' understanding of derivatives in multivariable calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2):357-384.

Rabardel, P. (2002). People and technology a cognitive approach to contemporary instruments. *Retrieved December*, 15:2011.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., and Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2):267-296.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: *Guiding students command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for mathematical learning*, 9(3):281.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. Human development, 52(2):83-94.

TRES EXPERIENCIAS DE DESARROLLO PROFESIONAL: EL CASO DE LA INTRODUCCIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

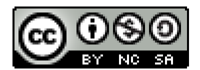
El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

José Julián Pasillas[1]
Judith Hernández[2]
Carolina Carrillo[3]

Recibido: 15 de mayo de 2019,
Aceptado: 12 de junio de 2019

Autor de Correspondencia:
Judith Hernández
judith700@hotmail.com





Resumen. Las competencias docentes más importantes para el profesor son: planear, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, para desarrollarlas de manera sistemática y reflexiva los profesores deben conocer herramientas, procedimientos y principios basados en Didáctica de la Matemática. En este trabajo se describen tres experiencias de desarrollo profesional realizadas por un futuro profesor de matemáticas. La primera consistió en adoptar el marco teórico metodológico del análisis didáctico para organizar, sistematizar y sustentar el diseño, el desarrollo y la evaluación de una unidad didáctica para la enseñanza del contenido matemático escolar determinado como "introducción a las funciones algebraicas" en el Nivel Medio Superior (NMS). En segundo, observar a un profesor de matemáticas experto del NMS. Finalmente con base en las dos experiencias anteriores rediseñar la unidad didáctica. Los resultados respaldan que el promover prácticas de corte teórico y práctico con eluniad sustento del análisis didáctico puede apoyar al profesor de matemáticas a desarrollar conocimientos y habilidades para el diseño, desarrollo y evaluación de una clase.

Palabras clave: Análisis Didáctico, Formación de profesores, Unidad Didáctica, Prácticas Profesionales

Abstract. The most important professional competences for the mathematics teacher are: planning, developing and evaluating teaching-learning activities. However, to develop them in a systematic and reflective way, teachers must know tools, procedures and principles based on

[1] *Universidad Autónoma de Zacatecas /México/ Correo: jose_julianpv@hotmail.com*
[2] *Universidad Autónoma de Zacatecas /México/ Correo: judith700@hotmail.com*
[3] *Universidad Autónoma de Zacatecas /México/ Correo: cgcarolin@hotmail.com*

Mathematics Didactics. This work describes three professional development experiences carried out by a future teacher of mathematics. The first consisted of adopting the theoretical methodological framework of the didactic analysis to organize, systematize and sustain the design, development and evaluation a Didactic Unit for the teaching of the mathematical school content "introduction to the algebraic functions" in the High School. In second, observe an expert math teacher from the High School. Finally, based on the two previous experiences, redesign the Didactic Unit. The results support that promoting theoretical and practical practices with the support of the didactic analysis can support the mathematics teacher to develop knowledge and skills for the design, developing and evaluation of a class.

Keywords: Didactic Analysis, Teacher Training, Didactic Unit, Professional Practices

1. Introducción

La formación de profesores de matemáticas es un tema de gran importancia en la didáctica de las matemáticas. Esto debido a la necesidad de profesores dispuestos a mejorar su práctica de enseñanza utilizando como referencia los resultados de la investigación en matemática educativa. En particular, es de nuestro interés aquella literatura del campo que presenta propuestas para sistematizar o dar a conocer herramientas para que el profesor de matemáticas mejore su práctica docente (algunas de estas investigaciones son, Pino-Fan y Godino, 2015; Montes, Contreras y Carrillo, 2013 y Gómez, 2007). El desarrollo de esta experiencia didáctica se basa principalmente en los resultados y propuestas realizadas en Gómez (2007).

En este sentido, Gómez (2007) establece un procedimiento de corte teórico-metodológico, al que denomina análisis didáctico, que podría ayudar al profesor de matemáticas a mejorar su práctica docente. Lo anterior, al organizar, sistematizar y sustentar el diseño, desarrollo y evaluación de una unidad didáctica. Aquí, la unidad didáctica es entendida como "una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos" (Segovia y Rico, 2001 p. 87; referenciado en Gómez, 2007, p. 30). En este caso la unidad didáctica siempre estará delimitada para un tema matemático escolar específico, lo que permitirá concentrar la problemática de la enseñanza al contenido elegido.

La importancia de proponer un procedimiento que guie y sustente el diseño, ejecución y evaluación de una clase es que éstas se constituyen en competencias específicas para el profesor (Beneitone et al., 2007). Además, en Pérez (2017) se determina que diseñar, ejecutar y evaluar una clase son competencias deseables que han logrado institucionalizarse en los planes y

programas de estudio que forman a profesores de matemáticas del Nivel Medio Superior (NMS) en México. La autora identifica que estas competencias son propuestas en cuatro referentes: uno de corte institucional (correspondiente al Tuning de Latinoamérica, que es un estudio diagnóstico reportado en el 2007); otro de corte laboral para el ingreso a la docencia (que es el acuerdo 447 publicado en el 2008); el tercero está relacionado con la formación de cualquier profesor y consiste en la propuesta de diez familias de competencias (el referente es Perrenoud, 2010); finalmente, el último corresponde a una reflexión teórica del campo de la matemática educativa propuesta en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008) donde se proponen algunas competencias didácticas para el profesor de matemáticas.

Sin embargo, aunque se ha establecido que estas competencias son deseables en la formación de un profesor de matemáticas, resulta que el conocimiento didáctico que tiene que ver con el conocimiento práctico y que se desarrolla en los procesos instruccionales de enseñanza de las matemáticas se ve envuelto en una problemática que aqueja a la educación matemática. Ya que el conocimiento teórico que se desarrolla en la formación inicial de los profesores está alejado a la realidad de la práctica de los mismos como Louvet y Baillauqués (1992); citado por Baillauqués (2005) lo afirman:

> Los maestros consideran que la formación inicial es "demasiado teórica" o que "no es suficientemente práctica" que es "demasiado alejada de la realidad" o "demasiado" formalista. Los maestros les reprochan a los formadores que "no les hayan advertido lo suficiente" (en cuanto a las dificultades que deberían afrontar, la influencia de los problemas sociales en la clase). (p. 73)

Por lo tanto en este documento se presenta una experiencia de desarrollo profesional en el que se propuso construir conocimiento profesional (teórico y práctico) a partir de tres experiencias:

1. La adopción y aplicación de la herramienta teórico metodológica del análisis didáctico (Rico, 2013 y Gómez, 2007), para el diseño, ejecución y evaluación de un contenido matemático escolar en el nivel bachillerato.
2. La observación no participante de las prácticas de un profesor experto de matemáticas del nivel bachillerato, utilizando como herramienta interpretativa el análisis didáctico.
3. El rediseño de la unidad didáctica utilizando los resultados de las dos primeras experiencias. Para ello se aplicó por segunda ocasión el ciclo del análisis didáctico.

A continuación se describen las tres experiencias profesionales.

2. Primer Experiencia: diseño de una clase con el análisis didáctico

Para el diseño de la unidad didáctica se adoptó la herramienta teórico metodológica del análisis didáctico que en palabras de Gómez (2007) es un procedimiento que "representa una visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (p. 30). Para organizar y sistematizar metodológicamente el diseño, ejecución y evaluación de una unidad didáctica, se propone el ciclo del análisis didáctico (Figura 1). Este ciclo incluye cuatro organizadores principales (análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación o evaluación) y tres complementarios pero imprescindibles (diseño curricular global, diseño de actividades y puesta en práctica).

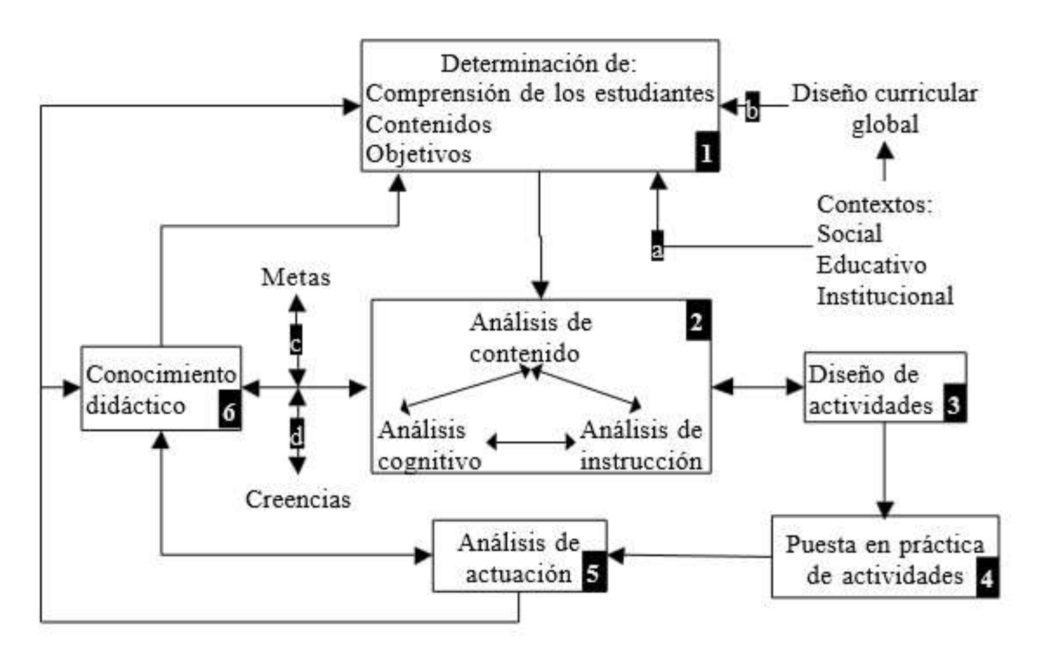


Figura 1: Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 31)

Todo el ciclo termina en la construcción de conocimiento didáctico que permite al profesor mejorar las prácticas de diseño, ejecución y evaluación de una unidad didáctica. Aquí presentamos los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico (Gómez, 2007) y que son los organizadores principales del diseño curricular local. Estos análisis se conforman en los organizadores 2 y 5 del ciclo del análisis didáctico como se presentan en la Figura 1 y que se describen de la siguiente forma:

> 1. El análisis de contenido, como el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto;
>
> 2. El análisis cognitivo, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
>
> 3. El análisis de instrucción, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción; y
>
> 4. El análisis de actuación o evaluación, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.
>
> (Gómez, 2007, p. 29)

Al análisis de evaluación se le suma lo expuesto en Rico (2013) respecto a la reflexión del profesor sobre todo el proceso del ciclo del análisis didáctico.

El tema matemático escolar que se eligió es la Introducción a las funciones algebraicas; este contenido se encuentra dentro del eje *Pensamiento y lenguaje variacional. Cambio y predicción*, que a su vez plantea promover las ocho competencias disciplinares propuestas en el programa del NMS (SEP; 2016a). Entre las prácticas que deben formar parte de esta unidad son las de: *explicar*, *interpretar*, *contrastar*, *analizar*, *determinar y estimar*. A continuación se presentan los resultados de la primera experiencia de desarrollo profesional, la cual fue implementada con un

grupo del NMS, pero en un taller de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

2.1 Análisis de Contenido

El análisis de contenido es el primero de los análisis que se consideran para diseñar, ejecutar y evaluar unidades didácticas. Gómez (2007) asegura que el propósito del análisis de contenido es el siguiente:

> El contenido propuesto para un tema o concepto matemático concreto es el resultado del trabajo y de la reflexión que el profesor hace cuando, a partir de su conocimiento y creencias, identifica y organiza los múltiples significados de dicho tema, para efectos de seleccionar aquellos significados que considera relevantes para la instrucción. (pp. 39-40)

El tema de función es uno de los elementos integradores de la matemática, es considerado como un concepto fundamental en esta disciplina. “Puede decirse que uno de los componentes fundamentales en la matemática escolar o especializada de nuestros tiempos es aquel concerniente al concepto de función” (Farfán y García, 2005, p.489). Los significados que se le atribuyeron a este concepto fueron variando con el paso del tiempo, de acuerdo a la interpretación que se le daba. Los personajes que se encargaron de dotar de significado al concepto función a lo largo de la historia, sentaron las bases para llegar hasta lo que ahora conocemos y entendemos por función matemática. Esta revisión histórica estableció el análisis conceptual que complementa el análisis de contenido para el tema de función.

El producto final del análisis de contenido es un mapa conceptual donde se hacen evidentes los significados que el profesor elige potenciar en su clase de matemáticas para el contenido de función (Ver Figura 2). Estos significados están integrados por una estructura que organiza las nociones y procedimientos que se abordarán del tema; se incluye además las representaciones que utilizará el profesor y finalmente la fenomenología que dará sentido al contenido. La propuesta se sustenta en los conocimientos del profesor de matemática en formación y que es el primer autor de este documento.

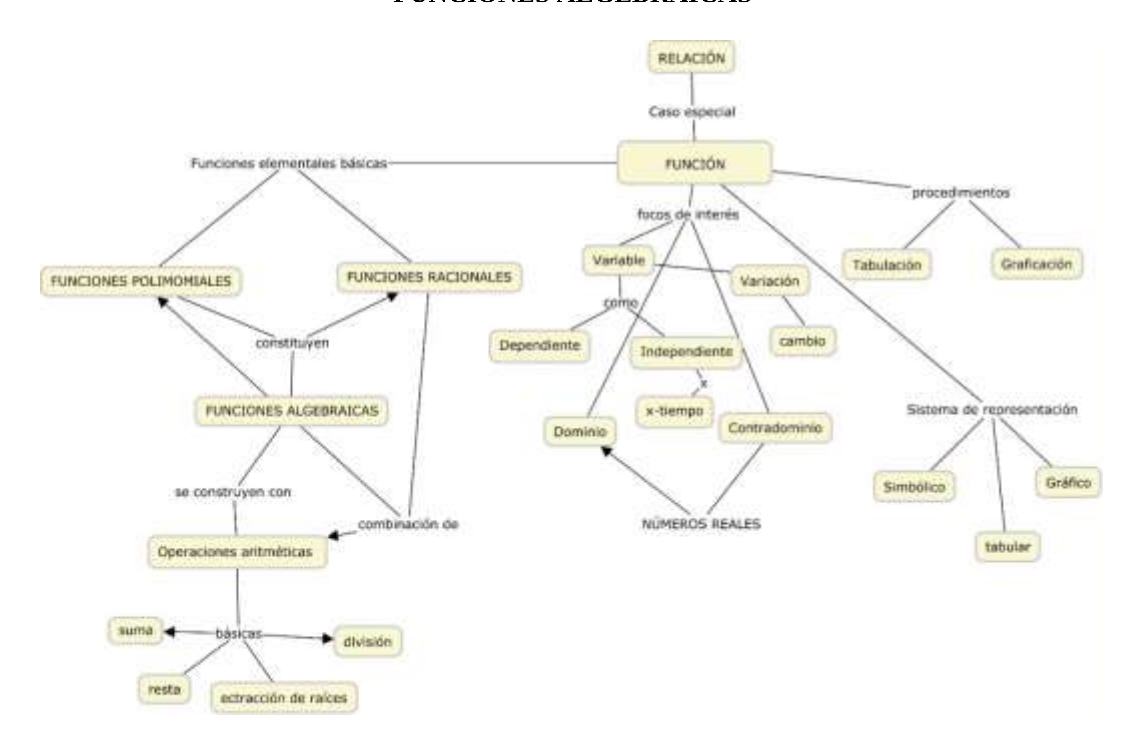


Figura 2: Mapa conceptual del tema matemático escolar de Introducción a las funciones algebraicas.
(Fuente: elaboración propia)

2.2 Análisis Cognitivo

En el análisis cognitivo el profesor debe crear hipótesis acerca de cómo lograr aprendizaje en sus estudiantes de acuerdo a las tareas que se les asignarán (Gómez, 2007). En este análisis se utilizaran tres nociones que constituirán la realización del mismo: competencias (expectativas de aprendizaje), capacidades y dificultades; todas relacionadas al contenido matemático escolar que se pretende enseñar. Entre las dificultades que se rescataron y que se ligaron a la red de significados propuesta en la Figura 2 están:

- Representar la variación por medio de letras en fórmulas, generalizar una situación de variación, interpretar el carácter abstracto y dinámico de la variable en expresiones algebraicas, establecer la relación de variación entre dos variables en una tabla, en una gráfica o en una fórmula (Andrade, 1998, p. 252)
- Se cambia la orientación positiva-negativa de los ejes cartesianos. - Se lee el eje de abscisas en sentido contrario al convenido. - Se lee el eje de ordenadas en sentido contrario al convenido, que es de abajo a arriba. Esto puede ser debido a que el sentido de lectura ordinario de un texto es de izquierda a derecha y de arriba abajo, y el alumno mantiene estos criterios en la lectura horizontal y vertical en los ejes cartesianos (Ortega y Pecharromán, 2014, p. 216).
- Se asocia el signo positivo de la función con el crecimiento de las ordenadas, es decir, se asocia el signo de las ordenadas con la monotonía. - Se asocia la propiedad de convexidad con la ubicación de la gráfica encima del eje de abscisas. - En el caso de la tendencia, los errores son debidos a que no se interpreta simultáneamente el comportamiento de las abscisas y las ordenadas, se limitan a explicar el comportamiento de una de las variables, normalmente la de las abscisas (Ortega y Pecharromán, 2014, p. 218).

- Una de estas deficiencias es el trazado de ramas que son práctica o totalmente verticales en funciones con ramas infinitas no asintóticas, como pueden ser las funciones polinómicas de segundo o tercer grado o las funciones exponenciales. […] encontramos también, […] funciones donde se representan valores del dominio con dos (o más) imágenes, al solaparse varios trazados en la representación gráfica de la función. Especialmente se produce al realizar las representaciones gráficas de funciones definidas a trozos, en las que los estudiantes ignoran el dominio de definición de cada parte (Arce y Ortega, 2013, p. 65).
- En 12 alumnos (un 41%) encontramos un uso de escalas no proporcionales (distinta unidad a lo largo del eje) en alguno de los ejes de los gráficos existentes. Este problema se concentra en la clase de la modalidad de Ciencias Sociales, apreciándose en siete de sus ocho alumnos (un 87,5%), sobre todo en las representaciones gráficas asociadas con problemas de interpolación lineal. (Arce y Ortega, 2013, p. 67)

Con lo anterior, el futuro profesor tiene conocimiento de algunos de los errores y dificultades que se pueden presentar en el aula para el tema matemático escolar de introducción a las funciones algebraicas. Estas dificultades deben incluir nociones y procedimientos relacionados con el tema en cuestión como: variación y comportamiento de la función; ubicación de puntos en el plano cartesiano; asignación de escalas a los ejes y trazo de gráficas de funciones, por mencionar algunos. Esto le permite al profesor anticipar y planear estrategias para ayudar a superar esas dificultades en caso de que aparezcan.

En lo que respecta a las expectativas de aprendizaje (competencias y aprendizajes esperados) y demandas cognitivas (capacidades). Las primeras se rescatan del primer organizador que corresponde al diseño curricular global; es decir al plan de estudios oficial (SEP, 2016). Las segundas son construidas por el profesor utilizando los organizadores ya desarrollados. La propuesta se concreta en la Tabla 1 donde se favorece el aprendizaje esperado *Caracteriza las funciones algebraicas como herramientas de predicción, útiles para el estudio del cambio*. Este aprendizaje forma parte, según al plan de estudios del NMS (SEP, 2016b), del tema matemático escolar *Introducción a las funciones algebraicas*; que corresponde al eje 4 *Pensamiento y lenguaje variacional. Cambio y acumulación* de la materia Matemáticas IV del bachillerato general. En la Tabla 1 se presentan las capacidades que el profesor propuso para este aprendizaje y su relación con las competencias del plan de estudios (SEP, 2016).

> C1: Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. C2: Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. C3: Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. C4: Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. (SEP, 2016, pp. 78-79)

Aprendizaje esperado: Caracteriza las funciones algebraicas como herramientas de predicción, útiles para el estudio del cambio.	**Competencias disciplinares básicas**			
Capacidades	*C1*	*C2*	*C3*	*C4*
Cap.1 Representar en tablas el cambio numérico de patrones de crecimiento.	**X**			**X**
Cap.2 Representar en gráficas el cambio numérico de patrones de crecimiento.	**X**			**X**
Cap.3 Proporcionar argumentos para justificar por qué se puede modelar un fenómeno a través de las funciones algebraicas.			**X**	
Cap. 4 Identificar el concepto de variación en problemas que éste involucrado este término.			**X**	

Tabla 1: Expectativas de aprendizaje vs demandas cognitivas.

2.3 Análisis de Instrucción

Gómez (2007) describe al análisis de instrucción como "el procedimiento en virtud del cual el profesor puede analizar y seleccionar las tareas disponibles para el diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje" (p. 76). Considerando los organizadores previos, el profesor rescató los conceptos que serían motivo de la instrucción en el aula; entre ellas están: Variable, Variación y Cambio; que se presentan en el mapa conceptual de la figura 2. Además se consideran representaciones de funciones de manera tabular y gráfica; dejando a los escolares deducir la forma algébrica de la función que hay implícitamente en el problema planteado. Con ello se ve reflejada la relación entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo para la realización del análisis de instrucción. A continuación se presentan las tareas y actividades propuestas para el desarrollo de la primera experiencia.

TAREA 1.

Un automóvil consume 1 galón de gasolina por cada 20 kilómetros recorridos.

Galones de gasolina	1	2	3	4	5
Kilómetros recorridos	20	40	60	80	100

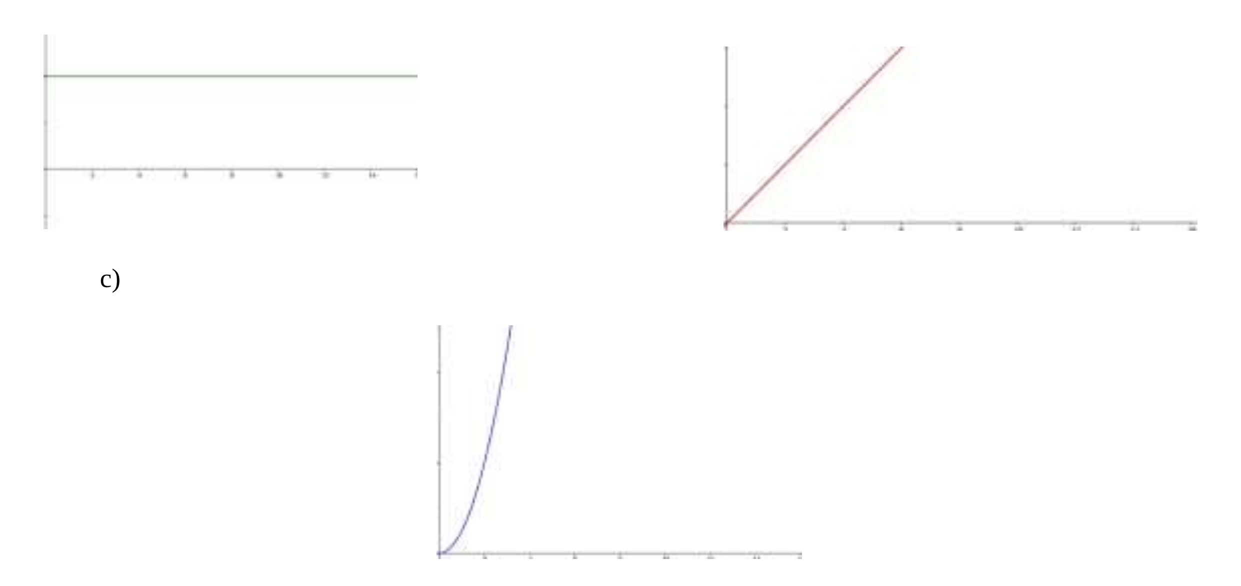
Actividad 1. ¿Cuál de las siguientes opciones puede considerarse como variable? Justifica tu respuesta

a) Galones de Gasolina b) Kilómetros Recorridos c) Ambos d) Ninguno

Actividad 2. De acuerdo a la tabla anterior ¿cómo es el cambio en los kilómetros recorridos por el automóvil por cada galón de gasolina?

Actividad 3. De acuerdo a la respuesta anterior, de las siguientes gráficas ¿cuál representa ese cambio? Justifica tu respuesta

a) b)



Actividad 4. Si X representa la cantidad de galones de gasolina y Y representa los kilómetros recorridos por el automóvil, da una expresión algebraica en términos de estas representaciones, para poder determinar los kilómetros que recorre el automóvil para cualquier cantidad de galones de gasolina. Justifica tu respuesta.

2.4 Análisis de Actuación o Evaluación

En el análisis de actuación se utiliza la información recabada de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje, que permita determinar la comprensión de los escolares hasta el momento; además de los contenidos que se deben tratar en el aula, así como los nuevos objetivos de aprendizaje que se abordaran en un nuevo ciclo del análisis didáctico. El propósito del análisis de actuación es establecer un seguimiento del progreso de los estudiantes de acuerdo a lo que se planificó y lo que sucedió durante la práctica. También se requiere rescatar logros y deficiencias en las actividades y tareas que fueron empleadas para la enseñanza del tema matemático escolar, incluyendo el desempeño del profesor (Gómez, 2007). Por tal motivo, después de la aplicación, el profesor identificó que los estudiantes no tuvieron problema para responder correctamente la actividad 1, no así el resto de las actividades donde identificó algunas dificultades, como:

> Futuro Profesor: los estudiantes no identifican los ejes del plano cartesiano con los nombres de "eje de las abscisas" y el "eje de las ordenadas", si no como el eje de las "x" y el eje de las "y". Además, no recordaban la gráfica de la función constante, algunos no habían visto el tema de función. Por lo tanto esto me llevó a descubrir que no se presentaron los errores y dificultades que yo consideré en el análisis cognitivo, tal vez fue por no poner actividades que pudieran reflejarlas de manera rápida o debido a que no alcanzamos de tiempo para resolver juntos la actividad y por ende no pude deducir otras dificultades. Además creo que para un nuevo ciclo del análisis didáctico, primero debo mejorar las actividades que plantee en el análisis de instrucción, de manera que sirvan para llevar a los escolares a construir conocimiento matemático y lograr el objetivo de aprendizaje específico y luego poner a resolver a ellos solos problemas relacionados con ese objetivo; y no empezar con que ellos resuelvan la actividad primero.

3. Segunda Experiencia: Observación de un profesor experto.

Blanco (1991) identifica una problemática en los estudiantes para profesores, relacionada con su práctica de enseñanza, él llama *factores de la interacción didáctica* a los fenómenos que causan

conflicto a los profesores noveles en la actuación en el aula. Entre los fenómenos que considera este autor están cuatro: indefinición del papel del alumno en su práctica; desconocimiento de la situación escolar concreta; escasa reflexión acerca del contexto escolar y problemas de disciplina. Por esta razón, Blanco (1991) considera que los estudiantes para profesores no tienen la habilidad y el conocimiento necesario para aprender de sus prácticas de enseñanza y propone como una posible solución aprender con ayuda de la observación y la práctica misma. Es por ello que en esta sección se presenta la segunda experiencia que fue desarrollada como parte de la práctica profesional del futuro profesor que es el autor principal de este escrito. La práctica profesional consistió en observar las clases de un profesor de matemáticas experto. Es decir, un profesor que según Rojas, Carillo y Flores (2012) puede identificarse al cumplir con características denominadas primarias y secundarias. Las primarias "aluden a aspectos específicos de la tarea de enseñanza y a cuestiones sobre conocimiento; son cualidades que han de confirmarse a través de la observación de clase, de entrevistas sobre el contenido, de instrucción y de actuación" (p. 482). O las secundarias que "atienden a aspectos generales de la experiencia profesional del profesor" (p. 483). En un principio se consideraron características secundarias fundamentadas dado que el profesor elegido es doctor en matemática educativa y es referenciado por sus compañeros y estudiantes como un buen profesor.

Lo anterior se realizó mediante una observación no participante; la cual fue organizada mediante las cuatro dimensiones del análisis didáctico (de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación). La institución educativa donde se llevó a cabo la observación del profesor experto fue el Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ) Plantel 1 en el turno vespertino y la clase estaba constituida por alumnos del 5° semestre del grupo D. El profesor observado al que llamaremos por cuestiones de privacidad Domingo cuenta con 31 años de experiencia docente, de los cuales 27 años han sido en dicho plantel. El profesor Domingo estudió la Licenciatura en Física y Matemáticas en la Escuela Superior de Matemáticas y Física perteneciente al Instituto Politécnico Nacional (ESFM-IPN), además estudió la Licenciatura en Matemáticas y la Maestría en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), y estudió el Doctorado en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGRO).

A continuación se presentan un fragmento de lo que el futuro profesor observó en las clases del profesor experto.

Futuro Profesor:

Análisis de instrucción

1. El profesor hace entrega de un examen que se había hecho anteriormente con las calificaciones correspondientes a cada uno de sus alumnos; esta estrategia didáctica es con el fin de preguntar antes de comenzar la clase si hay una duda o sugerencia al respecto y si no la hay el profesor comienza a registrar en su bitácora los resultados de cada uno de sus estudiantes.

2. Estrategia pedagógica: Desde mi punto de vista una estrategia pedagógica que el profesor consideró al principio de la clase es el reconocimiento del esfuerzo de uno de los escolares, ya que fue el único que sacó diez en el examen, pidiendo así el aplauso de los demás para hacérselo saber. Sin duda estrategia que

debo consideran con mis futuros alumnos, aunque también felicitar a aquellos que se esforzaron aún si sacar un diez en un examen.

3. Disposición de Material Didáctico: Como estrategia didáctica el profesor vuelve a utilizar el programa Geogebra con el objetivo de visualizar la gráfica de la función y(x)=x^2+1 , ya que tenían que sacar la derivada de esa función en el punto x=1.

4. Estrategia pedagógica: Vuelve hacerles recordar lo de la clase anterior, de cómo sacaron la derivada de la función y(x)=x^2 en el punto x=1, para poder realizar la nueva tarea que les asignó.

Otra estrategia pedagógica que observé es aquella que yo considero como "implementar lenguaje coloquial" en clase, ya que el profesor les dice que se imaginen que se le acerca una "lupa súper potente" al pedazo o tramo de recta que hay entre los puntos x_1=1 y x_2=1.1 refiriéndose a Δx=x_1-x_2 y poder dibujar dicho tramo de recta más grande en el pizarrón.

Reflexión: Una situación con las que varios profesores coinciden es aquella concerniente a la posibilidad de esperar aquello que consideraron o tenían pensado que pasara en su clase, de acuerdo a su planeación hecha previamente. Algo que se observó en esta clase tiene que ver con esta realidad, de resolver un problema considerando los datos del anterior inmediato llevó al consumo de un tiempo que tal vez el profesor tenía que aprovechar para seguir avanzando en la clase y que sin duda fue algo que le profesor no esperaba que pasara; con ello se observó que aunque el profesor tenga su clase planeada pueden pasar situaciones que cambien el rumbo de la misma y se debe contar con la pericia para actuar en situación, es decir, resolver cualquier tipo de inconveniente.

Después de terminar la segunda experiencia se procedió a iniciar de nueva cuenta con el ciclo del análisis didáctico. Es importante mencionar que el ciclo del análisis didáctico no menciona nada sobre realizar la observación de un profesor experto; sin embargo al tratarse de un profesor en formación y considerando que:

> Podemos señalar, como consecuencia más inmediata, que los estudiantes para profesores no poseen los suficientes conocimientos y habilidades para aprender afectivamente de sus experiencias de clase. Esto debería llevarnos a modificar los programas de formación del profesorado para ayudar a nuestros estudiantes a aprender a través de la observación y de la práctica (Blanco, 1991, p. 60).

Es que se decidió agregar la observación de un experto al ciclo del análisis para el caso de profesores nóveles. Es por ello que en la sección siguiente se presentan los cambios que se consideraron pertinentes para la mejora de la unidad didáctica con base en las dos secciones anteriores.

4. Tercera Experiencia: Rediseño de la unidad didáctica

La puesta en práctica del rediseño de la unidad didáctica fue llevada ahora en el Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) plantel Zacatecas. Esto determina un cambio en los contextos bajo los cuales fue propuesto el primer diseño. Por tal motivo el primer organizador relacionado con el currículum global y los contextos tuvieron que cambiar. Esto además incluyó un cambio en los aprendizajes esperados y por lo tanto en todos los análisis. Aquí se presenta cómo se hizo en la sección 2 solamente los cuatro organizadores centrales.

4.1 Análisis de contenido

Se identificó que en el primer mapa conceptual no se incluyó la fenomenología; además ésta tuvo que cambiar considerando el perfil de los estudiantes del CONALEP. El eje central ahora no es el contexto matemático por lo que el foco era determinar el cambio a través de dos preguntas ¿Cuánto cambia? y ¿Cómo cambia? De esta manera el resultado del nuevo mapa conceptual se presenta en la Figura 3. El significado que ahora se potencia es el de la función como medio para medir el cambio dividiendo en dos comportamientos, el lineal y no lineal. Además se considera como fenomenología la producción.

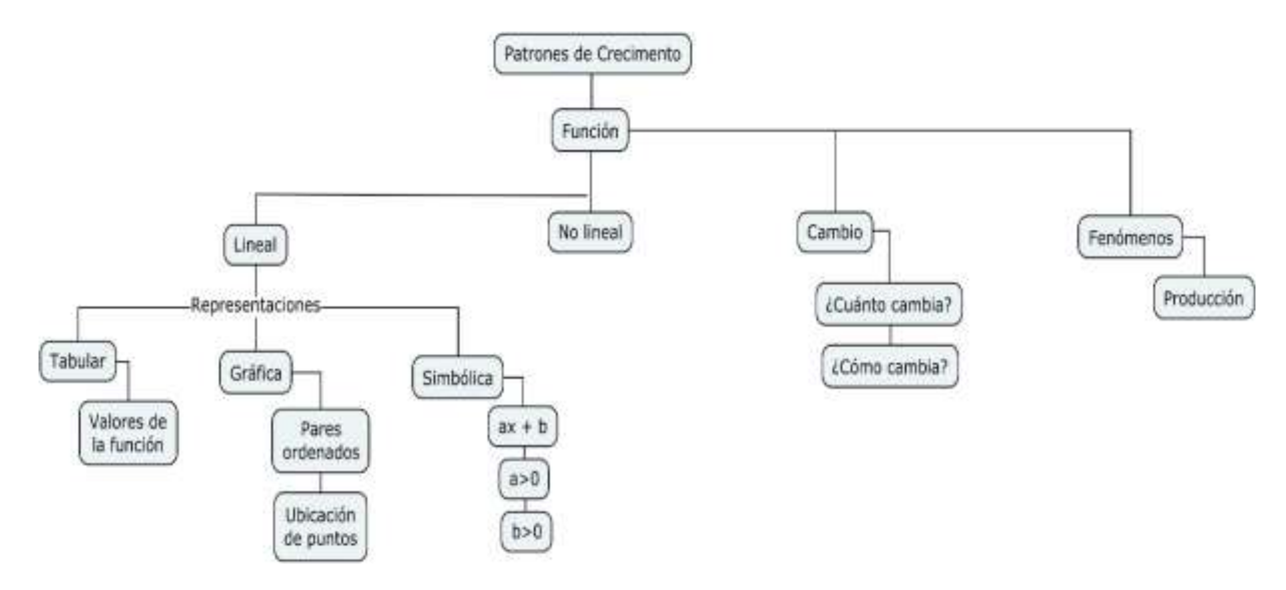


Figura 3: Mapa conceptual del tema matemático escolar de Introducción a las funciones algebraicas en su segunda versión (Fuente: elaboración propia)

4.2 Análisis cognitivo

Las expectativas de aprendizaje y sus relaciones cambiaron. El aprendizaje esperado ahora es *Representar en gráficas el cambio numérico de patrones de crecimiento* que forma parte de la expectativa más general propuesta en la sección 2.2. Esto permitió un aprendizaje esperado más específico, que es lo que se recomienda desde el análisis didáctico. Por tal motivo las capacidades también cambiaron por unas más concretas. Estos cambios también afectaron la relación con las competencias que se muestran en la Tabla 2. La razón por la que no se incluyeron las competencias 2 y 4 es que las capacidades y tareas propuestas están enfocadas a introducir a los estudiantes en el tema, sin uso de tecnología y dando un énfasis en la interpretación.

Aprendizaje esperado: Representar en gráficas el cambio numérico de patrones de crecimiento	**Competencias disciplinares básicas**		
Capacidades	*C1*	*C3*	*C5*
Cap.1 Identificar cuantitativamente el cambio que se genera en el patrón de crecimiento lineal dado.	**X**		
Cap.2 Escribir en pares ordenados la relación (tiempo, productividad) que da el patrón de crecimiento lineal.	**X**		
Cap.3 Ubicar los puntos de acuerdo a los pares ordenados en el plano cartesiano.	**X**		
Cap.4 Unir los puntos con un trazo para obtener la gráfica del patrón lineal.	**X**		
Cap. 5 Identificar cualitativamente el cambio en la gráfica del patrón lineal.		**X**	**X**

Tabla 2: Expectativas de aprendizaje vs demandas cognitivas en su segunda versión (Fuente: elaboración propia)

C1: Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. C3: Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. C5: Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento (SEP, 2016, pp. 78-79)

Respecto a las dificultades que el futuro profesor anticipa para este tema, son: los estudiantes no recuerdan la manera correcta de obtener la pendiente de una recta observando su gráfica; es decir si dividir el cateto adyacente entre el opuesto o viceversa. Además de aplicar un mismo algoritmo o procedimiento visto en la clase a una nueva tarea que implique los conocimientos vistos en clase. Por tal motivo en el análisis de instrucción se diseñó la tarea 3 para el tratamiento de estas dificultades. Cabe señalar que las dificultades consideradas en el rediseño fueron identificadas con la observación del profesor Domingo, que fue el profesor experto de la sección 3.

4.3 Análisis de instrucción

Dado los cambios en los aprendizajes esperados se realizaron el rediseño de actividades quedando de la siguiente manera:

TAREA 1: En una línea de producción de clavos, la máquina encargada de hacerlos empieza haciendo 1 para el primer segundo, 5 para el segundo 2, 9 para el segundo 3, 13 para el segundo 4, 17 para el segundo 5, etc.

Actividad 1.1. Se le pedirá a un estudiante pasar para representar en clase la producción de clavos de la máquina, pasando de un lado a otro la cantidad de clavos (se utilizarán palillos) que se necesita para obtener la producción que se indica en el enunciado anterior.

Con esta actividad se pretende que los estudiantes se den cuenta que para que se produzca un cambio en la producción de clavos se necesitan cuatro palillos por segundo, siendo este la cantidad del cambio. Para ello se proponen las siguientes preguntas abierta no dirigida

¿Notan alguna regularidad?, ¿Qué es lo que cambia o está cambiando en la "producción de clavos"? ¿Cuánto cambia y cómo cambia la producción de clavos?

Actividad 1.2. Llenar la siguiente tabla después de haber acabado can la actividad anterior.

Tiempo en segundos	Números de clavos producidos	Lapso de tiempo	¿Cuánto cambia la producción de clavos respecto al lapso de tiempo que se indica?
1		1-2	
2		2-3	
3		3-4	
4		4-5	
5		5-6	

Para la capacidad 2 se propone la siguiente actividad:

Actividad 1.3: Escribir como pares ordenados en el pizarrón la relación entre el tiempo y la cantidad de clavos producidos por la máquina, información deducida o extraída de la tabla. Pares de la forma (tiempo, productividad).

Para la capacidad 3 y 4 se propone resolver la siguiente tarea.

TAREA 2: Ubicar en el plano cartesiano los puntos que corresponden a los pares ordenados y unirlos con un trazo de manera que se obtenga la gráfica del patrón de crecimiento.

Para terminar se propone la siguiente tarea:

TAREA 3. Identificar el cambio de producción de clavos respecto del tiempo en la gráfica del patrón de crecimiento trayendo a colación la noción de la pendiente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ trazando un triángulo rectángulo donde su cateto opuesto y adyacente Δy, Δx respectivamente. Para después compartir y discutir las mismas preguntas de la actividad 1.1.

4.4 Análisis de actuación o evaluación

Para el futuro profesor los resultados de esta segunda experiencia fueron más satisfactorios, lo anterior lo expresó de la siguiente manera:

> Futuro Profesor: De acuerdo a lo vivido en clase se puede considerar que los objetivos de las actividades se cumplieron de la manera deseada ya que la mayoría de los estudiantes entendieron lo que cada actividad tenía destinado promover.
>
> Se identificaron dificultades, las mismas que ocurrieron en clase del profesor Domingo. Los estudiantes no memorizan ciertas fórmulas y no recuerdan algunas características de los objetos matemáticos, en específico la fórmulas de la pendiente dados dos puntos e identificar la pendiente de la expresión algebraica de una recta.
>
> La situación que consideré en el análisis cognitivo como posible actuación de los estudiantes concerniente a considerar lapsos de tiempo más largos (no solo de un segundo) y comparar el cambio de producción, se hizo presente con la pregunta de un alumno. Lo cual me hizo pensar en considerar resolver juntos y sacar deducciones. En este caso ellos fueron los que reflexionaron acerca del tema.

> Por otra parte, al terminar con lo que tenía planeado ejecutar en la clase consideré una actividad más en la clase. Les propuse un patrón de crecimiento diferente al que se mencionó en la tarea 1, se trataba del crecimiento no lineal, en específico la función cuadrática. Con esta actividad me pude dar cuenta de que los estudiantes al principio identificaban el cambio de este patrón de crecimiento como un solo número, algunos de ellos decían que el cambio era de 3, pero luego de verificar el cambio para otros lapsos de tiempo verificaban que no era el mismo, paro lo cual corrigieron y aseguraron que el cambio para ese nuevo patrón de cambio no era constante o el mismo.
>
> Luego pasamos a graficar la función cuadrática e identificamos las pendientes de las rectas que unían dos puntos diferentes consecutivos de la gráfica y les hacía énfasis en que esas rectas ya no tenían la misma inclinación o pendiente, que cambiaban según el paso del tiempo, para después reflexionar acerca de que el cambio para una función lineal es siempre el mismo o constante y que el cambio para las funciones no lineales es diferente, según la función considerada. Con esto dimos por terminada la clase.

En este caso en el análisis de evaluación se observa que el profesor se centró en los resultados y alcances obtenidos mediante las tareas. Además incluye una actividad al finalizar que además de ser congruente con el nuevo enfoque del currículo de matemáticas la introducción del siguiente tema. Es decir, se pide una clasificación de funciones algebraicas en términos del cambio (lineal y no lineal) más que la taxonomía conocida (polinomios, racionales y radicales). Lo anterior permite en nuestra opinión determinar al menos de manera incipiente en el rompimiento del discurso tradicional escolar que había utilizado en su primera experiencia. En la Tabla 3 y 4 se presentan las evidencias de evaluación que obtuvo el futuro profesor para la tarea 2 y 5 respectivamente. Es importante mencionar que dado que se trataba de una clase real, la forma en la que evalúa el futuro profesor obedece más a una de corte formativa que sumativa. En la tabla 3 se presenta una evaluación global del grupo y en la tabla 4 una individual por estudiante.

¿Se cumplió con el objetivo de la actividad?	**Argumentación**	**Dificultades**	**Observación**
Si	Para esta tarea el estudiante que pasó a identificar los puntos de acuerdo a los pares ordenados identificados previamente y además trazó por ellos una curva para representar un a gráfica. Esto lo hizo correctamente sin dificultades.	Ninguna	Aunque la actividad la resolvió un solo estudiante frente a clase, los demás estuvieron de acuerdo con el procedimiento de su compañero. Deduje entonces que los demás no tienen dificultades en ese aspecto.

Tabla 3: Evaluación global de la Tarea 2 realizada en clase

Est	¿Seleccionó la gráfica de la función que correspondía al cambio mencionado?	Observaciones
1	Si	Logra predecir la cantidad de clavos producidos de acuerdo al cambio que se menciona. Cometió un error al escribir un número en la tabla, pero no quiere decir que entendió mal lo que se pedía. No justifica su respuesta.
2	Si	Identifica el cambio en la gráfica de la función de la tarea 5, señalando que es la pendiente de la misma.
3	Si	A pesar de que considera la gráfica correcta que representa el cambio de la tarea 5, su justificación es distinta ya que él dice que el cambio es de 1 y no de 2 como debería ser de acuerdo a la tarea.
4	Si	Identifica la gráfica correcta de la tarea 5, añade que "si va constante" en su justificación, pero no especifica qué es lo que va constante. Si la gráfica o el cambio de producción de clavos.
5	No	No seleccionó ninguna de las gráficas que se presentaron para la tarea 5.
6	Si	En la tarea 5 identifica para cada segundo la cantidad de clavos producidos (de acuerdo al cambio dado) y selecciona la gráfica correcta.
7	Si	En la tarea 5 identifica para cada segundo la cantidad de clavos producidos (de acuerdo al cambio dado) y selecciona la gráfica correcta.
8	Si	La justificación para elegir la gráfica correcta de la tarea 5 fue "porque la producción va a lenta velocidad".
9	Si	En la tarea 5 identifica para cada segundo la cantidad de clavos producidos (de acuerdo al cambio dado) y selecciona la gráfica correcta.

Tabla 4: Evaluación por estudiante de la Tarea 5 realizada en clase

5. Reflexiones

Los resultados presentados en las tres experiencias evidencian que el futuro profesor construyó conocimiento didáctico que le permitió modificar su práctica. Dado que, reconoció que los aprendizajes esperados modifican la forma en la que se estructura y relaciona el contenido, por lo que los significados que eligió potenciar en la primer y tercera experiencia (Ver figura 2 y 3, respectivamente) son diferentes, aun siendo el mismo tema abordado. Otro elemento que incidió fue el contexto donde se aplicaron ambas experiencias. Respecto a la observación del profesor experto se identifica que esta experiencia tuvo mayor impacto en el futuro profesor al momento de tomar decisiones respecto al análisis cognitivo y de instrucción en el rediseño de la unidad didáctica. En el caso del análisis cognitivo, el futuro profesor retomó las dificultades que observó en la clase real del profesor Domingo y corroboró que estas dificultades se presentaron al momento de desarrollar su clase. Para el análisis de instrucción, el futuro profesor identificó la

importancia de conocer los contextos (educativos, institucionales y escolares) y que la actuación del profesor en algunos casos obedece más a cuestiones administrativas que didácticas. Por tal motivo, y con base en el desempeño del futuro profesor se considera que promovió competencias docentes necesarias para su día a día.

También, el futuro profesor identificó algunas ventajas del análisis didáctico y su ciclo en la construcción de conocimiento práctico; es decir conocimiento ligado al diseño, ejecución y evaluación de una clase de matemáticas. Entre ellas, el reconocer que si bien el diseño curricular global le permite delimitar los temas y aprendizajes de su clase, los planes de estudio del NMS no proporcionan información de cómo lograr los alcances propuestos; esta ausencia pudo ser guiada gracias al análisis didáctico. En este caso, cada uno de los organizadores propuestos en este enfoque teórico metodológico le permitió identificar la influencia de los contextos (social, educativo e institucional) en su práctica docente. El análisis de contenido le permitió reflexionar sobre la complejidad que puede llegar a encerrar un solo contenido matemático escolar. Esta complejidad se vio ratificada en el análisis conceptual donde evidenció la construcción del concepto de función a través de la historia y como le brindaba información sobre las representaciones que se usaban y la fenomenología que rodeo su origen y desarrollo. Del análisis cognitivo, el futuro profesor resalta que le sirvió para prever lo que los estudiantes pueden hacer en la ejecución de las tareas que se le piden en el aula. Además de ayudar de acuerdo a las investigaciones en matemática educativa a superarlas. Aunque como parte del análisis de evaluación el futuro profesor advierte que no logró ayudar a sus estudiantes a superar las dificultades que se presentaron. Es aquí donde la observación de un profesor experto le permitió reconocer que las acciones de los profesores a veces obedecen a esa anticipación de las dificultades o bien a la atención de los contextos que rodean su práctica. En particular, las dificultades que se observaron en los estudiantes del Colegio de Bachilleres del estado de Zacatecas también las presentaron los estudiantes del CONALEP.

En particular el futuro profesor explica como utilizando el análisis didáctico para observar a un profesor experto le permitió identificar: la estructura de la clase del profesor observado; los significados que potencia en la clase; sus estrategias didácticas y pedagógicas, para lograr su objetivo de aprendizaje; las dificultades que los estudiantes presentan al interactuar en clase y las consideraciones sobre imprevistos y situaciones que se pueden desarrollar en el desarrollo de una clase.

En nuestra opinión, la parte que permite a los futuros profesores un diseño local, aunque eso no significa que les resulte sencillo, es la elaboración de capacidades. Este proceso permite aterrizar las competencias en demandas que pueden ser observables por los profesores. En particular la parte que más se le dificultó al futuro profesor fue romper con el discurso tradicional, por lo que las tareas que eligió en el primer diseño mantenían esta estructura. No fue hasta en la segunda experiencia que logró romper parcialmente con esta situación. De esta manera; planear, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica de un tema matemático escolar le permitió ponerse como él mismo lo dice en los terrenos cotidianos de un profesor de matemáticas. Aunque estas prácticas el futuro profesor las realizó tomando en cuenta las investigaciones de la Matemática Educativa, el experimentar dos veces el ciclo del análisis didáctico y de manera complementaria la observación de un profesor experto le permitió al futuro profesor construir conocimientos y habilidades teóricas y prácticas base para el profesor de matemáticas.

6. Agradecimientos

Queremos aprovechar este espacio para expresar nuestro agradecimiento a los dos profesores que accedieron que fuéramos parte de su práctica. El primero quien nos permitió observar sus clases y quien es profesor del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (COBAEZ) plantel 1. El segundo quien nos prestó a su grupo para aplicar el segundo diseño y quien es profesor del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) plantel Zacatecas

7. Referencias

Acuerdo número 447 (2008, 29 de octubre). *Diario Oficial de la Federación.* Recuperado de http://cosdac.sems.gob.mx/descarga_archivo2.PHP?documento=ACUERDO447.pdf&ubicacion=reforma&tipo=0.

Andrade, C. (1998). Dificultades en el aprendizaje de la noción de variación. *Revista EMA. 3* (3), 241-253.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G. y Wagennar, R. (Eds.) (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe final -Proyecto Tuning-América Latina 2004-2007*. España: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/.

Blanco, L. (1991). Interacción didáctica en la enseñanza de las matemáticas con estudiantes de magisterio. *Interuniversitaria de Formación del Profesorado. 12*, 57-68.

Farfán, R. y García, M. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa. 18*, (1), 489-494.

Godino, J., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia.* Centro de Profesores y Recursos Murcia, 17-19 Abril 2008.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis doctoral inédita). Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, España.

Montes, M. A., Contreras, L. C., y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación. 12* (2), 209-221.

Pérez, C. (2017). *Competencias y campos de acción presentes en los currículos oficiales para la formación inicial de profesores de matemáticas del Nivel Medio Superior* (Tesis maestría). Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas, México.

Perrenoud, P. (2010). *Diez nuevas competencias para enseñar*. España: Grao.

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36* (1), 87-109.

Rico, L. (2013). El método de Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 33, 11-27.

Rojas, N., Carrillo, J., Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp. 479 - 485). Jaén: SEIEM

Secretaria de Educación Pública -SEP-. (2016a). *Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016*.

Secretaria de Educación Pública -SEP-. (2016b). *Nuevo currículo de la educación media superior. Campo disciplinar de matemáticas. Bachillerato General.* Nuevo Modelo Educativo.

UNA PRESENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO, EN ESCUELAS DE INGENIERÍA, NO CENTRADA EN LA DEFINICIÓN DE LÍMITE

El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

José Ismael Arcos Quezada [1]

Recibido: 15 de mayo de 2019,
Aceptado: 18 de junio de 2019

Autor de Correspondencia:
José Ismael Arcos Quezada
ismael_arcos@msn.com



Resumen. Si se admite que la presentación de conceptos matemáticos en la enseñanza debe considerar las necesidades e intereses de aquellos a quienes se dirige el proceso educativo, entonces los cursos de matemáticas que se imparten en las escuelas de ingeniería deben pensarse e impartirse en consideración de la manera en la que los conceptos matemáticos involucrados habrán de ser utilizados en la actividad profesional del ingeniero y, claro está, en la manera en esos conceptos se utilizan para adquirir y utilizar los conocimientos propios de las ciencias de la ingeniería. La presentación tradicional del Cálculo está centrada en el concepto de límite, a pesar de que la experiencia en las aulas muestra claramente que se tienen grandes dificultades para el aprendizaje y a pesar de que los textos utilizados para la enseñanza de las ciencias de la ingeniería utilicen los conceptos del Cálculo con un escaso recurso del concepto de límite. En este documento se pretende insistir en la posibilidad de ofrecer una presentación del Cálculo, en escuelas de ingeniería, que no ponga en el centro de atención al concepto de límite.

Palabras clave. Cálculo en la formación de ingenieros, Enseñanza del Cálculo, Cálculo con infinitesimales.

Abstract. Admitting that the presentation of mathematical concepts in teaching should consider the needs and interests of those to whom the educational process is directed, then the mathematics courses taught in the engineering schools should be thought and imparted in the manner in which the mathematical concepts involved will be used in the professional

[1] *Universidad Autónoma del Estado de México/ Facultad de Ingeniería/ México/ Correo: Ismael_arcos@msn.com*

activity of the engineer and, of course, in the way these concepts are used to acquire and use the knowledge of the engineering sciences. The traditional presentation of Calculus is centered on the concept of limit, although the experience in the classrooms clearly shows that there are great difficulties for learning and even though the texts used for the teaching of engineering sciences use the Calculation concepts with a scarce resource of the concept of limit. This document intends to insist on the possibility to offer a presentation of the Calculus, in engineering schools, that does not put in the center of attention the concept of limit.

Key words. Calculus in engineering education, Teaching of the Calculus, Calculus with infinitesimals.

1. Introducción. Las distintas versiones del Cálculo

Se suele asociar el origen del Cálculo basado en la definición de límite con la publicación del *Curso de Análisis* de Cauchy, en el decenio de los 1820. Gradualmente, esa versión del Cálculo fue adquiriendo aceptación en las aulas hasta alcanzar un estatus hegemónico, a principios del siglo XX y a partir de entonces, y hasta fines del mismo siglo, la presentación de los cursos de Cálculo, en particular los que se ofrecen en las escuelas de ingeniería, estuvo firmemente asociada a la definición de límite, con algunas variaciones en cuanto al grado de rigor adoptado. Sin embargo, la experiencia en las aulas, así como los innumerables trabajos de investigación en Matemática Educativa que se han hecho durante casi medio siglo, dan cuenta de la gran dificultad para entender el Cálculo bajo esa perspectiva y, más que nada, para entender y utilizar sus conceptos en el contexto de las ciencias de la ingeniería.

Y es que, como puede observarse en los textos utilizados para el aprendizaje de esas ciencias, los conceptos del Cálculo se utilizan de una manera mucho más próxima a las versiones anteriores a la Cauchy, en particular a las de Leibniz, Newton o Lagrange, en las que el concepto de límite ni siquiera había aparecido. Esta situación provoca una desvinculación entre los cursos de Cálculo, que normalmente se ofrecen al comenzar los estudios de licenciatura, con los de ciencias de la ingeniería, que se ofrecen a media carrera.

Esta es una situación que habría que analizar con mayor atención, considerando sus efectos en el aprendizaje del Cálculo y en uso del mismo como una herramienta para el entendimiento de las ciencias de la ingeniería y las consecuentes implicaciones en el desempeño profesional de los ingenieros. A continuación, y para contribuir en este análisis se hará referencia a algunos momentos de la evolución de los conceptos del Cálculo y de su enseñanza en las escuelas de ingeniería.

Para comenzar cabe comentar algo de lo dicho por Lazare Carnot en sus *Reflexiones sobre el Análisis Infinitesimal* (cuya segunda edición fue publicada en 1813), obra en la que expone las virtudes del Análisis Infinitesimal, o sea, la versión leibniziana del Cálculo y las compara con las otras versiones (que él llama Métodos) de las que se disponían al inicio del siglo XIX.

Pues bien, Carnot indica, bajo el título, el propósito de la obra, a la vez que describe las tres partes en las que se compone:

> Yo busco conocer en qué consiste el verdadero espíritu del Análisis infinitesimal; las reflexiones que yo propongo al respecto son distribuidas en tres capítulos: en el primero, expongo los principios generales de este análisis; en el segundo examino cómo este ha sido reducido en algoritmo, por la invención del cálculo diferencial e integral; en el tercero, lo comparo con aquellos otros métodos que lo pueden sustituir, tales como el método de exhausión, el de los indivisibles, el de las indeterminadas, etc. Carnot (1921).

Observamos entonces que Carnot afirmaba que estas distintas presentaciones del cálculo no eran mutuamente excluyentes, de manera que podía ser utilizada una de ellas en lugar de otra o más de una de ellas en el estudio de alguna problemática de interés.

Es interesante saber a cuáles otros métodos se refiere Carnot. En el capítulo 3, menciona el *método de exhausión*, para referirse al método de los “antiguos” [griegos], el *método de los indivisibles* (Cavalieri), el *método de las indeterminadas* (que atribuye a Descartes), el *método de las primeras y últimas razones o de los límites* (Newton), el método de las fluxiones (Newton), el cálculo de las cantidades evanescentes (Euler) y la *Teoría de las funciones analíticas o funciones derivadas* (Lagrange), cuya segunda edición fue publicada casi simultáneamente con la segunda edición de la segunda edición de las Reflexiones de Carnot.

Luego, en el primer capítulo, Carnot expone los “principios generales de análisis infinitesimal”, donde comienza por remarcar su importancia como una herramienta eficiente, a la vez que sencilla, para la modelación matemática de la naturaleza, situación especialmente importante en la formación de ingenieros:

> No hay ningún descubrimiento que haya producido, en las ciencias matemáticas, una revolución así de feliz y con tanta rapidez como el del Análisis infinitesimal; ninguna se ha valido de medios más simples y más eficaces para penetrar en el conocimiento de las leyes de la naturaleza.

Aproximadamente medio siglo después, un autor francés, Boucharlat, habría de manifestar la inquietud de tomar elementos de cada una de las tres propuestas con mayor presencia en ese momento; la de los infinitamente pequeños de Leibniz, la de los límites de Newton, y la algebraica de Lagrange:

> El método de los infinitamente pequeños no es sino un medio expedito de encontrar los diferenciales de diversas funciones, él grava sus diferenciales en nuestra memoria mediante figuras geométricas reducidas al último grado de simplicidad, y que hablan más a la imaginación que las ideas abstractas; en fin, este método deviene indispensable en las partes altas de la mecánica y la astronomía, en donde, sin él, la resolución de problemas tendría una extrema dificultad.

> […] Si el método de los límites complementa al de los infinitamente pequeños, rectificando aquello poco que este último podía tener defectuoso, el método de Lagrange complementa a su vez al de los límites, haciendo depender los coeficientes diferenciales de la pura Álgebra. Se puede entonces considerar entonces a estos tres métodos como formando uno solo. Boucharlat (1858).

Podemos reconocer entonces que, para algunos de los autores de libros para la enseñanza del cálculo, en el siglo XIX, resultaba sumamente importante el aspecto didáctico. Se pretendía tomar los elementos positivos de cada versión para conseguir un texto que resultara más accesible para quienes se iniciaban en el estudio de esta ciencia.

Sin embargo, a pesar de los intentos de Carnot y otros seguidores de la versión leibniziana del Cálculo, la propuesta de Cauchy, surgida en la segunda década del siglo XIX fue ganando adeptos y, luego de aproximadamente un siglo, y debido a su fortaleza desde el punto de vista del rigor lógico, terminó por desplazar a las otras, pero sólo en el quehacer de los matemáticos profesionales. Al respecto, y de acuerdo con Boyer (1986), fue Heine, bajo la influencia de Weierstrass, quien en 1872 enunciaría la siguiente definición:

> Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.

Esta es, con insignificantes diferencias en la simbología, la definición de límite que aún encontramos en los libros de texto. Y, como indica el mismo Boyer, marcó, de manera definitiva, el fin del recurso de las cantidades infinitamente pequeñas o de puntos moviéndose para generar curvas:

> En esta definición fría, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a cantidades que fluyan engendrando magnitudes de dimensiones superiores, ni al menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, ni a despreciar cantidades infinitamente pequeñas. No han quedado nada más que números reales, la operación de sumar y su opuesta la de restar, y la relación «menor que» entre números reales.

Seguramente se estará de acuerdo con Boyer, en cuanto a la “simplicidad y precisión” de la definición de Heine, siempre y cuando se observe desde la perspectiva de los profesionales de la matemática. Sin embargo, desde la perspectiva de la docencia, en las escuelas de ingeniería, la experiencia recabada durante las últimas cuatro décadas nos indica claramente que la definición rigurosa de límite no resulta accesible para la gran mayoría de los estudiantes.

Ahora bien, más recientemente, el reconocido divulgador de las Matemáticas, Ian Stewart en sus comentarios al conocido libro *¿Qué son las matemáticas?*, escrito en 1941 por Courant y Robbins se ha pronunciado en este mismo sentido, el reconocimiento de las ventajas didácticas de aceptar las cantidades infinitamente pequeñas:

> […] Courant y Robbins subrayan que “las diferenciales” como cantidades infinitamente pequeñas están ahora descartadas definitiva y deshonrosamente”: una reflexión precisa del punto de vista que se tenía por consenso cuando se escribió ¿Qué son las matemáticas? A pesar del veredicto de Courant y Robbins, siempre ha habido algo intuitivo y llamativo en los argumentos a la antigua con infinitesimales. Están aún sumergidos en nuestro lenguaje en ideas tales como “instantes” de tiempo, velocidades “instantáneas” y el considerar una curva como una serie de líneas rectas infinitamente pequeñas y el área acotada por una curva como suma de una cantidad infinita de áreas de rectángulos infinitesimales. Este tipo de intuición resulta estar justificado, pues se ha descubierto recientemente que el concepto de cantidades infinitamente pequeñas no es deshonroso y no tiene por qué ser descartado. (Stewart en Courant y Robbins, 2010).

Para finalizar esta reseña, cabe referirse a Ivor Grattan-Guinness, quien en su artículo titulado ¿*Qué es y qué debería ser el cálculo*?, nos dice:

> El planteamiento de Cauchy-Weierstrass, basado en los límites se ha convertido naturalmente en la forma habitual de enseñanza en los cursos dedicados al cálculo o al análisis (puro). Sin embargo, en los cursos de mecánica, astronomía, física matemática e ingeniería a menudo se emplea la forma euleriana del cálculo diferencial por su flexibilidad intuitiva en la construcción de los modelos diferenciales de los fenómenos físicos en cuestión. Sobre este punto Cauchy fue criticado en la *Ecole Polytechnique* durante la década de 1820 por de Prony, uno de los sinodales de gradación:
>
> > La enseñanza, en el análisis puro y en la geometría analítica, parece haber dejado que desear en la práctica y en la facilidad de las aplicaciones a las fórmulas y a las teorías generales: algunos alumnos muy brillantes, luego de demostrar satisfactoriamente las fórmulas, se encuentran en problemas cuando llega el momento de resolver casos concretos. Es indispensable no aislar nunca las nociones abstractas de las consideraciones en detalle; estas últimas siempre preceden a aquellas en el desarrollo natural de las ideas. Y es necesario aceptar esta ley de la naturaleza, sobre todo cuando se trata de enseñar a jóvenes para quienes la teoría ha de ser una *herramienta* de la práctica.
>
> …En el caso de la enseñanza del cálculo, la hegemonía de los límites ha provocado una esquizofrenia educacional desafortunada y totalmente innecesaria: el cálculo puro no es otra cosa que epsilonitis de pared a pared e ignora la forma diferencial euleriana del cálculo que los cursos de cálculo aplicado con excelente razón, a menudo utilizan como elemento básico. Grattan-Guinness, 1991.

Así pues, Grattan-Guinness afirma, en primer término, que el énfasis en el rigor hace menos accesible el Cálculo al buen entendimiento por parte de los alumnos. Por otra parte, afirma que el abandono de los infinitesimales ocurrió sólo en los cursos de Cálculo, cuando se presentan sus conceptos de manera descontextualizada, ya que sigue utilizándose en aquellos cursos en los que el Cálculo es más bien aplicado, lo cual puede constatarse al hacer un análisis de los textos usados para la enseñanza de las ciencias básicas y de la ingeniería (Arcos, 2000).

2. El límite o la diferencial

A continuación, y para ilustrar lo antes señalado, vamos a ver cómo se utilizan algunos conceptos o temáticas del Cálculo en textos de ciencias de la ingeniería, comenzando con los conceptos de límite y continuidad.

En cuanto a la idea de continuidad, ésta es abordada desde un punto de vista físico, claramente alejado del rigor lógico con el que aborda en los textos de Cálculo. Hasta fines del siglo pasado, se recurría al límite para definir funciones de punto, como la densidad, el volumen específico o la presión, cuidándose de no hablar de distancias excesivamente pequeñas. Así, en el texto de Termodinámica de Burghardt, para definir el volumen específico, se decía lo siguiente:

> Existen varias propiedades bien conocidas, pero que debemos definir rigurosamente para saber con exactitud lo que se desea significar con ellas. *Volumen específico* es el volumen de una sustancia dividido entre su masa. Pero, ¿hay algún punto donde esto deje de ser cierto? ¿Tendría significado el volumen específico si se selecciona una sola molécula para representar la sustancia que vamos a

> medir? No. En primer lugar, el volumen específico es un fenómeno macroscópico; en segundo, para que una propiedad sea macroscópica debe existir en un *medio continuo*; es decir las propiedades macroscópicas tienen que variar continuamente de una región a otra sin interrupciones. Decimos región y no punto porque este último concepto geométrico (infinitesimal) no puede tener partículas de una sustancia dada (¿o si?); de esta manera, el espacio más pequeño que puede ocupar una sustancia macroscópica, sin perder sus propiedades también macroscópicas, es una región con un volumen característico $\delta V'$. Si el volumen específico se designa por v, y δV es un volumen pequeño de sustancia, con una masa δm, entonces $v = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta V}{\delta m}$. (Burghardt, 1984)

Observemos que, además de recurrir a terminología infinitesimalista, se recurre innecesariamente al concepto de límite, ya que, si aceptamos un cierto valor para el volumen característico $\delta V'$, bastaría con indicar que, para cada punto del espacio, se tome una esfera o un cubo, con centro en el punto cuyo volumen sea $\delta V'$, y que contenga en su interior una masa δm de la sustancia, el volumen específico en el punto será $\frac{\delta V'}{\delta m}$.

Más recientemente, con respecto de la misma temática, Çengel, un autor actualmente muy reconocido en escuelas de ingeniería nos dice:

> La materia está constituida por átomos que están igualmente espaciados en la fase gas. Sin embargo, es muy conveniente no tomar en cuenta la naturaleza atómica de una sustancia y considerarla como materia continua, homogénea y sin ningún hueco, es decir, un continuo. La idealización de continuo permite tratar a las propiedades como funciones puntuales y suponer que varían en forma continua en el espacio sin saltos discontinuos. Esta idealización es válida siempre y cuando el tamaño del sistema analizado sea grande en relación entre moléculas. Este es el caso de casi todos los problemas a excepción de algunos especializados. La idealización del continuo está implícita en muchos enunciados, como "la densidad del agua en un vaso es la misma en cualquier punto". […] En este libro sólo se consideran sustancias que es posible modelar como un continuo. Çengel y Boles, 2015.

Luego de lo cual, y ya que se ha dicho que sólo se considerarán sustancias homogéneas, procede a definir densidad y volumen específico, sin recurrir al límite.

> La densidad se define como la masa por unidad de volumen $\rho = \frac{m}{V}$. El recíproco de la densidad es el volumen específico v, que se define como el volumen por unidad de masa. Es decir $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$.

Por otra parte, en la generalidad de los textos de Cálculo, respecto de la temática relacionada con el concepto de límite, plantean como algo importante, el cálculo del límite de una función f, definida por medio de un cociente de otras dos funciones $\left(f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\right)$, cuando la variable tiende a un valor a, para el cual ambas funciones (numerador y denominador) valen cero ($p(a) = q(a) = 0$), es decir, cuando se presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Es este sentido, una vez que se ha la definido el límite y se han expuesto algunos teoremas para el cálculo del límite (generalmente sin demostrar) se consideran algunos casos simples, por ejemplo, cuando numerador y denominador tienen a $x - a$ como factor. Para casos más complejos la respuesta se da hasta después de definir la derivada, introduciendo la "regla de L'Hôpital", por medio de la cual se puede calcular el límite para esta y otras formas indeterminadas. En cuanto a la interpretación gráfica, el asunto parece no ser tan importante y se

aborda posteriormente, hasta que se habla de la continuidad, haciendo referencia a la discontinuidad “evitable”.

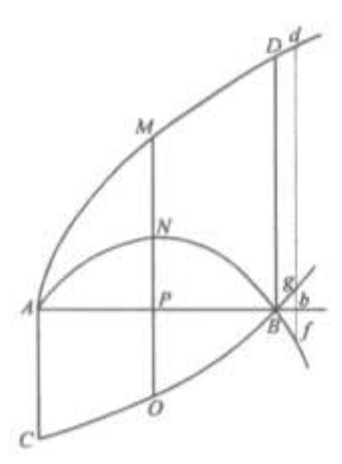


Figura 1. Proposición 1 de la sección IX del *Análisis* de L’Hôpital. Figura tomada de la fuente consultada

Veamos, ahora, el planteamiento original del marqués de L’Hôpital, en su *Análisis de los infinitamente pequeños*, escrito a fines del siglo XVII. En la proposición I de la novena sección (de diez), titulada “Solución de algunos problemas que dependen de los métodos precedente”, aborda el siguiente problema:

> *Sea* AMD *una línea curva* (*AP* = *x*, *PM* = *y*, *AB* = *n*) *tal que el valor de la ordenada y esté expresado por una fracción, en la cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando x = a*; *es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B* (figura 1 en este documento). *Se pregunta cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD*. L’Hôpital (1998)

Así pues, L’Hôpital se plantea el problema de determinar por dónde pasa la gráfica de la función (definida por un cociente) cuando ambas funciones (numerador y denominador) se anulan. En términos del Cálculo escolar actual, está pasando por alto que la función cociente no está definida en esa situación.

En el caso de las escuelas de ingeniería, cabe preguntarse qué tan importante es indicar que, en este caso, a la gráfica sólo le hace falta un punto, o bien si podemos “ignorar el agujero” indicando que el cálculo del límite nos sirve para ver “por qué punto pasa la gráfica”, tal como lo hacía L’Hôpital.

3. El Cálculo diferencial

En la versión leibniziana del Cálculo, la diferencial de una cantidad variable se definía como un incremento infinitamente pequeño de la misma. Esa acepción se conserva hasta nuestros días, en los textos de ciencias de la ingeniería, de manera que, un incremento finito de la temperatura T de un gas, por ejemplo, se denotará mediante ΔT, mientras que un incremento infinitesimal de la misma, es decir, una diferencial de la temperatura se denotará mediante dT.

Desde esta perspectiva, al introducir los conceptos relativos al movimiento rectilíneo, por ejemplo, si se considera que una partícula se desplaza una distancia Δs en un tiempo Δt se dirá

que la partícula se movió con una velocidad promedio $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, mientras que, si se desplaza una distancia ds en un tiempo dt se dirá que la partícula se movió con una velocidad (instantánea) $v = \frac{ds}{dt}$.

Sin embargo, en los textos actuales de Cálculo, cuando se define la derivada y se presenta la notación leibniziana $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, donde $y = f(x)$, se hace hincapié en que no debe verse $\frac{dy}{dx}$ como un cociente, ya que dx y dy no tienen ningún significado por separado. Cuando posteriormente se define la "diferencial" de una función, más bien se define la aproximación lineal del incremento de la función: $y = f(x)$, $dy = f'(x)\,dx$, donde dx y dy son cantidades finitas.

Actualmente, en los textos de Mecánica (utilizados en las escuelas de ingeniería) se introduce la velocidad como un límite, aunque luego se opera con ella como si tratara de un cociente de diferenciales. Un caso interesante, a este respecto, es el que se observa en los textos de Meriam. En la primera edición, de 1952, se indica:

> La velocidad instantánea v en cualquier posición sobre su trayectoria es la razón instantánea temporal de cambio del desplazamiento o $v = \frac{ds}{dt}$ [...] La aceleración instantánea a de un punto en cualquier posición sobre la trayectoria es la razón temporal instantánea de cambio de la velocidad $a = \frac{dv}{dt}$ o $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. Eliminando dt entre [estas ecuaciones], se obtiene una relación entre desplazamiento, velocidad y aceleración: $v\,dv = a\,ds$. Meriam (1952).

Casi medio siglo después, en la tercera edición, se dice lo siguiente:

> A medida que Δt se va haciendo menor y tiende a cero en el límite, la velocidad media tiende a ser la velocidad instantánea del punto, la cual es $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, o sea $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ [...] A medida que Δt se va haciendo menor y tiende a cero, la aceleración media tiende a ser la aceleración instantánea del punto, la cual es $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, o sea $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ o $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$ [...] Eliminando el tiempo dt entre estas ecuaciones, resulta una ecuación diferencial que relaciona el desplazamiento, velocidad y aceleración: $v\,dv = a\,ds$ o bien $\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds$. Meriam y Kraige (1998).

En el texto original se hace una llamada a pie de página en donde se indica que «Las cantidades diferenciales se pueden multiplicar y dividir de la misma forma que las cantidades algebraicas». Así pues, los autores utilizan la derivada como un límite, pero, inmediatamente después, como un cociente.

4. El Cálculo integral

En los textos de Cálculo, el proceso de integración para obtener una expresión, para una cierta cantidad variable, tiene lugar a partir de sumas de Riemann. El valor de la cantidad buscado se aproxima por medio de una suma cuyos términos se expresan en función de una variable, y el

valor buscado se obtiene mediante “el paso al límite”, cuando cada uno de los términos tiende a cero y el número de términos tiende a infinito.

Por ejemplo, cuando se trata de calcular la masa de una placa plana, esta se aproxima como la suma de las masas de pedazos de área ΔA de la placa, considerando como densidad de cada pieza, la que se mide, por ejemplo, en el centro de la pieza. Es decir $m \cong \delta(x,y)\Delta A$, siendo ΔA un rectángulo de lados Δx y Δy, de manera que $\Delta A = \Delta x \Delta y$, y $\delta(x,y)$ es la densidad en el punto (x,y), que puede ser el centro del rectángulo. Luego se hacen tender Δx y Δy a cero y se obtiene una integral doble.

En los textos de ciencias de la ingeniería, en cambio, en pocas ocasiones se procede de esta forma, más bien se hace a la manera leibniziana, eligiendo una parte infinitamente pequeña de la cantidad buscada (elemento o diferencial) y se suman (integran) luego esos elementos.

Tomemos, por ejemplo, el texto de Estática de Hibbeler, publicado hace menos de una década, y veamos cómo se procede para determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sólido, para lo cual se tiene como antecedente la determinación de la resultante (suma) de un sistema de fuerzas distribuidas, así como de su punto de aplicación. Para la magnitud de la resultante y con referencia a la figura 2 se indica:

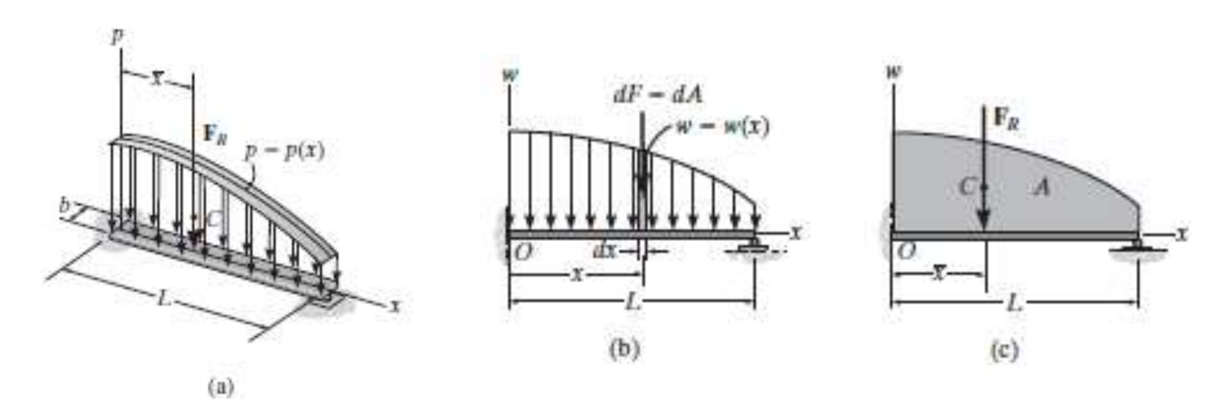


Figura 2

A partir de la ecuación $F_R = \sum F$, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es equivalente a la suma de todas las fuerzas en el sistema. En este caso, debemos usar integración puesto que hay un número infinito de fuerzas paralelas $d\mathbf{F}$ que actúan sobre la viga, figura 2b. Como $d\mathbf{F}$ actúa sobre un elemento de longitud dx, y $w(x)$ es una fuerza por unidad de longitud, entonces $dF = w(x)dx = dA$. En otras palabras, la magnitud de $d\mathbf{F}$ se determina a partir del *área* diferencial sombreada dA bajo la curva de carga. Para toda la longitud L:

$$F_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$$

Por consiguiente, la magnitud de la fuerza resultante es igual al área total A bajo el diagrama de carga, figura 2c. Hibbeler (2010).

Observemos que, en todo momento se utiliza una terminología infinitesimalista: número infinito de fuerzas, elemento de longitud dx, integrar es sumar una infinidad de cantidades infinitamente pequeñas, área diferencial dA. El autor no considera necesario o apropiado recurrir al límite.

Para ubicar el punto de aplicación de la fuerza resultante se indica:

Aplicando la ecuación $M_R = \sum M_o$, la ubicación $\tilde{x}$ de la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ puede determinarse igualando los momentos de la fuerza resultante y de la distribución de fuerzas con respecto al punto O (el eje y). Como $d\mathbf{F}$ produce un momento de $x\,d\mathbf{F} = x\,w(x)\,dx$ con respecto a O, figura 2b, entonces, para toda la longitud

$$\bar{x}F_R = -\int_L xw(x)dx$$

Al despejar $\tilde{x}$ obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x)dx}{\int_L w(x)dx}$$

Esta coordenada x, ubica el centro geométrico o *centroide* del *área* bajo el diagrama de carga distribuida. *En otras palabras, la fuerza resultante tiene una línea de acción que pasa por el centroide C (centro geométrico) del área bajo el diagrama de carga*, figura 2*c*.

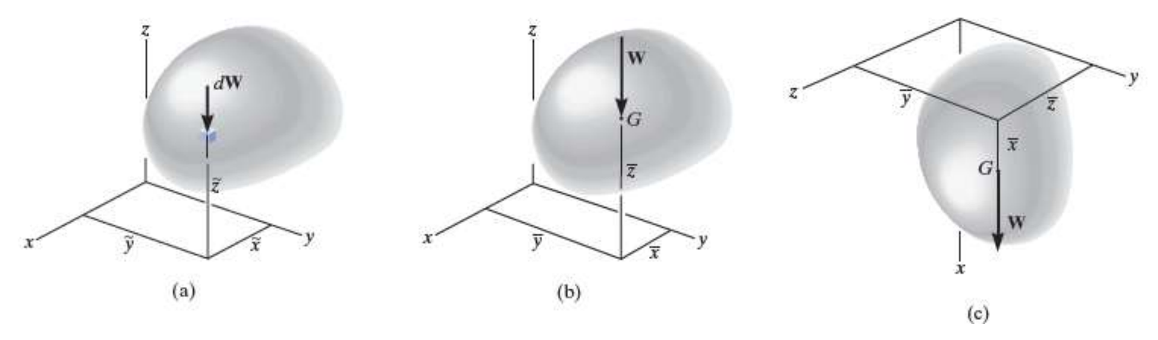


Figura 3

Con este antecedente, para ubicar el centro de gravedad de un cuerpo, Hibbeler indica:

Un cuerpo está compuesto de un número infinito de partículas de tamaño diferencial, y por tal razón si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso dW, figura 3*a*. Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa a través de un solo punto llamado el *centro de gravedad*, *G*, figura 3*b*. […] Con los métodos delineados anteriormente, el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir $W = \int dW$.

La ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje y, se determina al igualar el momento de W con respecto al eje y, figura 3b, con la suma de los momentos de los pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si dW se ubica en el punto $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, figura 3a, entonces $\bar{x}W = \int \tilde{x}\,dW$. De la misma manera, si se suman los momentos con respecto al eje x, $\bar{y}W = \int \tilde{y}\,dW$. Por último, imagine que el cuerpo está fijo dentro del sistema de coordenadas y este sistema se gira 90° con respecto al eje y, figura 3c. Entonces la suma de los momentos con respecto al eje y es $\bar{z}W = \int \tilde{z}\,dW$. Por lo tanto, la ubicación del centro de gravedad G con respecto a los ejes x, y y z se convierte en

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\,dW}{\int dW}$$

Luego llega a las expresiones correspondientes al centro de masa al considerar, de acuerdo con la segunda ley de Newton, el peso del cuerpo (fuerza) como el producto de la masa por la aceleración gravitatoria (supuesta constante):

> A fin de estudiar *la respuesta dinámica* o el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar el centro de masa del cuerpo C_m, figura 9-2. Esta ubicación puede determinarse al sustituir $dW = g\ dm$ en las ecuaciones anteriores. Como g es constante, se cancela y entonces
>
> $$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\ dm}{\int\ dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\ dm}{\int\ dm} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\ dm}{\int\ dm}$$

Finalmente, llega a las expresiones para las coordenadas del centroide o centro geométrico del sólido, al considerar homogéneo el material componente del cuerpo:

> Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad ρ será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen dV tiene una masa $dm = \rho\ dV$. Al sustituir esto en las ecuaciones anteriores y al cancelar ρ, obtenemos fórmulas que localizan el centroide C o centro geométrico del cuerpo; a saber
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \ldots\ldots \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

Observemos aquí que, en las expresiones anteriores, el símbolo de integral indicaba la suma de elementos (partes infinitamente pequeñas) de alguna cantidad, el peso es la suma de elementos de peso $W = \int\ dW$ o la masa es la suma de los elementos de masa $m = \int\ dm$. En estas últimas ecuaciones se añade V como un subíndice en cada uno de los símbolos de integral, lo cual nos indica que los dV son elementos que deben tomarse de V. Lo mismo encontramos en la ecuación $F_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$, obtenida anteriormente, los dx son elementos de L y los dA son elementos de A.

Así pues, como lo observan Arcos y Sepúlveda (2011), el reconocimiento de las diferenciales como cantidades infinitamente pequeñas permite dar un significado geométrico a las simbologías utilizadas para cada uno de los distintos tipos de integral: dx es un elemento de un segmento rectilíneo (integral simple), dA es un elemento de una parte del plano, dV es un elemento de una región sólida, etcétera.

Así, procediendo de manera similar, Hibbeler obtiene las coordenadas del centroide de una región plana:

> Si un área se encuentra en el plano $x - y$ y está delimitada por la curva $y = f(x)$ […] su centroide pertenecerá a este plano y podrá determinarse a partir de integrales
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

Finalmente, para el caso del centroide de una barra o alambre curvilíneo (línea), Hibbeler indica:

> Si un segmento de línea (o barra) pertenece al plano $x - y$ y puede describirse mediante una curva delgada $y = f(x)$, figura 4, entonces su centroide está determinado por
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

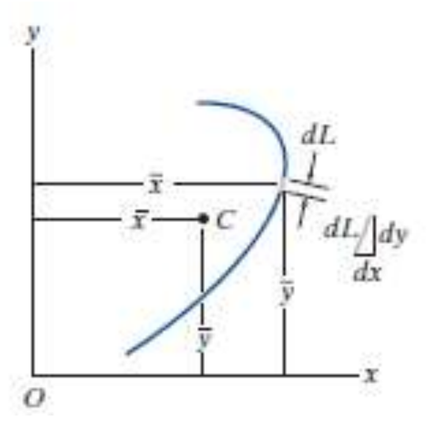


Figura 4

Indicando, enseguida, como obtener algunas expresiones para el elemento de arco dL:

> Aquí, la longitud del elemento diferencial está dada por el teorema de Pitágoras, $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, que también se puede escribir en la forma $dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$ o bien $dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\; dy$.

5. Conclusión

Por lo que puede observarse en los textos utilizados en los cursos correspondientes, la manera en la que los conceptos básicos del Cálculo se utilizan para abordar y resolver problemas propios de las ciencias de la ingeniería es claramente más cercana a las versiones originales del Cálculo, en las que ideas como las relacionadas con lo infinitamente pequeño resultan indispensables, que a la versión derivada de los trabajos de Cauchy, basada en el concepto de límite, que es la que generalmente se ofrece en las escuelas de ingeniería.

Por otra parte, se puede decir que, en la segunda mitad del siglo pasado, la matemática escolar, en las escuelas de ingeniería, sobre todo los cursos de Cálculo ponían el énfasis en el rigor lógico. Sin embargo, ante la evidencia de las dificultades que el entendimiento de los conceptos del Cálculo disminuía notablemente con una presentación basada en el rigor, el énfasis se movió hacia aspectos de carácter operativo y algorítmico.

Este cambio no propició un mejor entendimiento y uso de los conceptos matemáticos, a la hora de ponerlos en juego para abordar y resolver problemas propios de las ciencias de la ingeniería y para la modelación matemática de problemas físicos, tareas indispensables para una buena formación escolar de los ingenieros.

Considerando esto y lo expuesto en este trabajo cabe reflexionar sobre la elaboración de propuestas didácticas para la presentación de los conceptos del Cálculo, de manera que se perciba una continuidad al momento de utilizar esos conceptos en contextos propios de las ciencias de la ingeniería. Una de tales propuestas sería una en la que lo infinitesimal tenga cabida.

Si además se aprovechan los recursos tecnológicos disponibles en la actualidad, se puede hacer una presentación en la que los aspectos operativo y algorítmico disminuyan su importancia, de manera que los propósitos de los cursos de Cálculo sean los de habilitar a los estudiantes en esas dos competencias matemáticas clave: la solución de problemas y la modelación matemática.

Bibliografía

Arcos, I. (2000). *Acerca de la enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería. Un acercamiento infinitesimalista*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Arcos, I., Sepúlveda, D. (2011). La diferencial de área, una perspectiva infinitesimalista. *El Cálculo y su enseñanza*, 3, 19-33.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Boucharlat, J. L. (1858). *Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, Paris: Mallet-Bachelier.

Burghardt, M. D. (1984). *Ingeniería Termodinámica*. Segunda edición. México: Harla.

Carnot, L. (1921). *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitesimal*, París: Gauthier-Villars, reimpresión de la segunda edición de 1813.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis*. México UNAM. Versión en español basada en los trabajos originales en francés: Cours d'analyse (1821) y Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal (1823).

Çengel, Y. A., Boles, M. A. (2015). *Termodinámica*. Octava edición. México: Mc Graw Hill Education.

Courant, R., Robins, H. (2010). *¿Qué son las matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.

Grattan-Guinness, I. (1991), ¿Qué es y qué debería ser el cálculo? *Mathesis*, 7 (3), 363-387.

Hibbeler, R. C. (2010) *Ingeniería mecánica. Estática*. Decimosegunda edición. México: Pearson Educación.

L'Hôpital, M. de. (1998), *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: UNAM. (Versión en español del original en francés: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, de 1696).

Meriam, J. L. (1952), *Mechanics II, Dynamics*. New York: Wiley.

Meriam, J. L., Kraige, L. G. (1998), *Mecánica para ingenieros. Dinámica*. Tercera edición, Barcelona: Reverté.

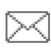
QUISICOSAS VECTORIALES[1]

El Cálculo y su Enseñanza.
Enseñanza de las Ciencias y la Matemática
ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Humberto Madrid de la Vega[2]

Recibido: 13 de mayo de 2019,
Aceptado: 19 de junio de 2019

Autor de Correspondencia:
Humberto Madrid de la Vega
hmadrid@gmail.com



Resumen. En este escrito se introduce de manera dosificada el complejo y abstracto concepto de vector, desde su interpretación en la física como una flecha con dirección, magnitud, sentido y punto de aplicación, hasta ser elemento de un abstracto espacio vectorial. Esta presentación establece una cierta ruta didáctica que permite presentar algunos conceptos esenciales del algebra lineal. Como es conocido el concepto de vector y de espacio vectorial no son sencillos, pero podemos construir ejemplos o modelos, interesantes, ilustrativos, accesibles y sorprendentes. Sin embargo, en el proceso de abstracción y generalización se gana y se pierde. Se pierde el contexto, la interpretación geométrica, la sencillez de las operaciones y otros que aparecen en los casos específicos, pero se gana en unidad y amplitud en el campo de acción del concepto. De ninguna manera pretendemos que con lo aquí expuesto se pueda entender con amplitud el concepto de vector. Quedan demasiadas facetas por conocer, y éstas aparecen una y otra vez en el estudio de las diferentes ramas de la matemática y de las relaciones de ella con las demás ciencias en formas verdaderamente.

Palabras Clave: Vector, Algebra, Física

Abstract. In this paper the complex and abstract concept of vector is introduced in a dosed way, from its interpretation in physics as an arrow with direction, magnitude, sense and point of application, up to be an element of an abstract vector space. This presentation establishes a certain didactic route that allows to present some essential concepts of linear algebra. As it is known the concept of vector and vector space are not simple, but we can build examples or models, interesting, illustrative, accessible and surprising. However, in the process of abstraction and generalization, it is gained and lost. The context, the geometric interpretation, the simplicity of the operations and others that appear in the specific cases are lost, but unity and breadth in the field of action of the concept is gained. In no way do we intend that the concept of a vector can be comprehensively understood

[1] Transcripción del trabajo: Quisicosas Vectoriales. Publicado en Cuadernos de Educación Matemática 1. Serie: Enseñanza de la matemática. Facultad de Ciencias, UNAM. 1981. Publicado con permiso del autor.

[2] *Universidad Autónoma de Coahuila/ México/ Correo: hmadrid@gmail.com*

with what is presented here. There are too many facets to be known, and these appear again and again in the study of the different branches of mathematics and the relationships of it with the other sciences in truly.

Key words: Vector, Algebra, Physical

A manera de introducción

En Argentina, la cuestión (de las matemáticas modernas) fue sometida al consejo Federal de Educación en 1978, para proscribir la enseñanza de las matemáticas modernas en tanto a disciplina "subversiva". El fiscal de las matemáticas modernas (un abogado de orientación integrista católica) señalaba que algunos términos como "vector" tienen consonancia marxista, y que el enfoque moderno de las matemáticas inicia al individuo en la relatividad. (A. Pérez Lindo. "Las matemáticas Modernas: Pedagogía, Antropología y Política". Perfiles Educativos No. 10 (1980) CISE, UNAM.)

¿Qué es cosa y cosa?

¿Qué empuja, describe un movimiento y puede convertirse en matriz o función?

QUISICOSA: **(Contr. de la fr. ant. ¿Qué es cosa y cosa? fórmula inicial de las adivinanzas populares). f. fam.** Enigma u objeto de pregunta muy dudosa y difícil de averiguar.

Poco a poco nos vamos acostumbrando al término de vector. Primero es una fuerza en un curso de física y con los años llega a ser un elemento de un espacio vectorial. Como personaje de misterio, cambia varias veces de personalidad y en ocasiones hace uso simultáneo de varias de ellas, confundiéndonos de vez en vez. A final de cuentas terminamos por sucumbir, nos empieza a ser familiar la palabra a fuerza de tanto uso, y a la amalgama de esas vagas o claras (?) personalidades le damos ciudadanía de concepto. No nos queda de otra, es la costumbre; los textos, los profesores nos trasmiten los conceptos y resultados en un estilo conciso, impositivo, lógico-deductivo, la verdad acabada. Axioma, definición, lema, teorema, corolario, lema, teorema, corolario, . . . en sucesión que en ocasiones se antoja inacabable y realmente lo es. Y lo importante no es este sinfín, sino su intención, su significado, su razón de ser. El contenido aparece de cuando en cuando, y da la sensación de ser fortuita la relación del concepto con la realidad (1), cuando de ella se deriva.

Se dejan de lado matrices, recovecos, sobre entendidos, sutilezas y detallitos que los autores y profesores desprecian o prefieren no tocar. Su estilo es con frecuencia lineal, parcial y limitado; lineal por su monotonía, parcial por mostrar sólo una de las múltiples caras de un concepto o resultado y limitado porque al ocultar el contenido nos impide imaginar y medir los alcances de los conocimientos adquiridos.

No está por demás hacer algunas reflexiones alrededor del concepto de vector y mostrar algunas de sus facetas menospreciadas, olvidadas o incluso ignoradas.

En este escrito, la definición de vector, o más correctamente, de espacio vectorial no nos interesa en sí misma; tampoco estudiar su estructura (2). Hablaremos de aquello que está antes y como trasfondo del concepto.
Esto en la primera parte; y en la segunda, algo sobre las implicaciones y ¿por qué no? la esencia del concepto mismo.
La primera parte, "antes de", consta de unas notas personales que me han servido de guía para clases y conferencias, escritas más o menos al vuelo años atrás y con retoques mínimos de plática en plática, y como tales requieren de anotaciones que las complementan. Estrictamente no son "antes de", como el lector se dará cuenta, sino una forma de introducir el concepto que muy esquemáticamente sigue una línea histórica.
La segunda parte, "después de", está basada en una idea de José Julio Carmona C., alumno del curso de Álgebra Lineal. Dicha idea fue discutida entre ambos y la redacción de "Espacios vectoriales curiosos" fue, con mucho, trabajo de él. Es una muestra interesante de creatividad de los estudiantes, si ésta es estimulada adecuadamente (3). Se demuestra que "casi" cualquier conjunto es un espacio vectorial, trasciende en mucho nuestras ideas geométricas y va más allá de los ejemplos no geométricos que se manejan en los textos. A ello le sigue una sección de comentarios personales que intentan ubicar la dimensión de dicho trabajo.
Deliberadamente hemos dejado tal cual la redacción de estos dos trabajos, pues nos parece que modificarlos merece redactarlos en otro estilo, incorporar más elementos, trascender en varias direcciones las ideas ahí expuestas y ésta es una labor más compleja y puede representar alternativas de trabajo para aquellos que se plantean seriamente la enseñanza de las matemáticas como una disciplina de investigación.
No puedo dejar de mencionar que estas reflexiones se centran en gran parte en mi experiencia de la Facultad de Ciencias de la UNAM, aunque, ya lo he dicho, también toman elementos de experiencias fuera de ella.

SOBRE EL CONCEPTO DE VECTOR

. . . los conceptos aparecen tras una serie de sucesivas abstracciones y generalizaciones, cada una de las cuales reposa en la combinación de experiencias con conceptos abstractos previos . . . (A.D. Aleksandrov)

Con frecuencia algunos estudiantes (4) se preguntan qué demonios es un vector. En Física es una flecha, en Geometría es un segmento de recta dirigido, en Geometría Analítica es una colección ordenada de números y en Algebra Lineal un vector es . . . ¡un elemento de un espacio vectorial! Además, resulta que entes como las funciones o las matrices, pueden ser considerados como vectores. El presente trabajo pretende aclarar estas cuestiones. Algunos puntos son bastantes esquemáticos, pero damos una bibliografía para quien quiera profundizar en dichos puntos. Suponemos además que el lector ya ha trabajado con vectores de una u otra forma.

1. La noción física de vector

La noción de vector como una flecha que puede representar la magnitud, dirección y sentido de una fuerza, una velocidad o una aceleración es conocida desde la antigüedad. Aristóteles ya conocía la ley del paralelogramo (Kline, 1972. p. 776) (5).

La primera observación importante que debemos hacer es que el hecho de representar una fuerza por medio de una flecha es ya un gran paso de abstracción. Esta abstracción permitió en la antigüedad un avance importante en problemas de estática, por ejemplo. Nos parece que precisamente los problemas de estática sugirieron la idea de vector. Un problema sencillo de estática está indicado en la figura 1.

Dado un peso **P**, ¿a qué tensión están sometidos los puntos **A** y **B**?

Como las tensiones son aplicadas a lo largo de las cuerdas, es más o menos natural pensar en representar a estas tensiones como en la figura 2. La punta de la flecha indica la dirección y sentido de la fuerza y el tamaño, su magnitud.

En la sección 2, puede encontrarse una descripción interesante sobre la naturalidad con que aparecen los vectores.

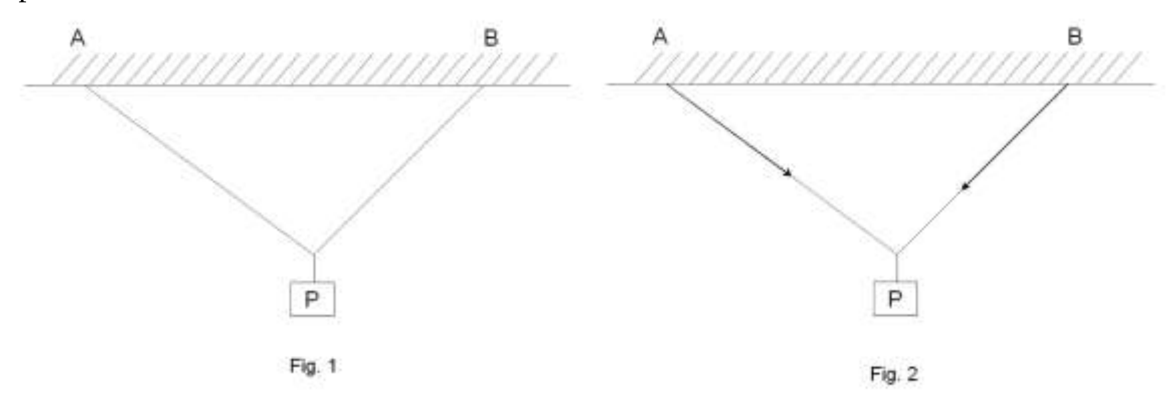


Fig. 1

Fig. 2

Sin embargo, no resulta tan natural representar a la velocidad como una flecha.

No nos debe de extrañar que Aristóteles conociera los vectores. Los egipcios lograron un alto desarrollo de las matemáticas, y por otro lado sus avances arquitectónicos hacen suponer que conocían la estática con cierta profundidad. Esto nos permite aventurar la hipótesis de que los egipcios ya manejaban de alguna forma la noción de vector.

Ahora bien, en esta época el desarrollo de la herramienta teórica estaba en función directa de las necesidades concretas. Es posible que el desarrollo de la estática, y por consiguiente de los vectores, se debiera precisamente a las necesidades arquitectónicas. Pero estas necesidades eran de índole religiosa, es decir, sociales, ya que la religión normaba las relaciones sociales. Entonces es probable que el surgimiento de los vectores haya tenido un carácter, por así decirlo, social.

2. La noción geométrica de vector

Aunque desde la antigüedad es conocida la suma de vectores (por medio de la ley del paralelogramo), realmente no es considerada como operación sino como “la resultante”. Sólo tiempo después es cuando se crea un algebra de vectores, bastante relacionada con problemas de física, en particular de mecánica. Pero también se da aquí un proceso de abstracción. A pesar de surgir de problemas físicos, lo que se hace es despojar a las flechas de su naturaleza física y manejar únicamente sus operaciones con sus correspondientes propiedades. Es decir, se llega a un álgebra de “flechas”.

Hagámoslo más explícito. se define, para $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la suma $\vec{A}+\vec{B}$ utilizando la ley del paralelogramo. También se define $\alpha\vec{A}$, siendo α un número real, como aquel vector que, si $\alpha > 0$, tiene la misma dirección y sentido, pero con magnitud α veces la de $\vec{A}$; y si $\alpha < 0$, un

vector igual al caso anterior, pero de sentido contrario. Con estas operaciones así definidas, se deducen las siguientes propiedades básicas de las "flechas".

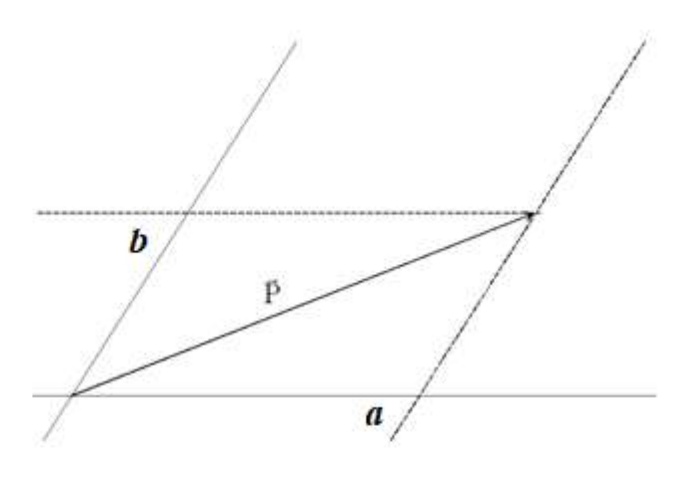
- $P_1.\ \vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- $P_2.\ \left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$
- $P_3.\ \vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$ ($\vec{0}$ es el vector cero, sin magnitud ni sentido)
- $P_4.\ \vec{A}+(-1)\vec{A}=\vec{0}$
- $P_5.\ \alpha\left(\beta\vec{A}\right)=(\alpha\beta)\vec{A}$
- $P_6.(\alpha+\beta)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$
- $P_7.\ \alpha\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$

Destaquemos la importancia de esta abstracción. Al despojar a las "flechas" de su ropaje físico y manejar a las flechas en base a ciertas reglas (las definiciones de las operaciones) y propiedades (de la P_1. a la P_7. 7), estamos haciendo una abstracción de la abstracción. Una consecuencia importante de esta abstracción es el hecho de que utilizando esta álgebra de vectores podemos demostrar generalmente con más facilidad los teoremas de la geometría euclidiana.

Observemos que cada paso de abstracción nos desprende cada vez más de la realidad, pero, sin embargo, deja lo esencial, en este caso las propiedades de las flechas. La ventaja es que esta abstracción nos sirve para resolver problemas concretos semejantes o mucho más complejos que aquellos que dan origen a la abstracción. Cualquiera que haya estudiado un poco de Estática no podrá negar la importancia del álgebra de vectores para resolver, por ejemplo, los endemoniados problemas de equilibrio de fuerzas.

3. La noción algebraica de vector (I)

La noción geométrica de vector y los conceptos de la Geometría Analítica dan lugar al concepto algebraico de vector (que después es generalizado como veremos posteriormente). Recordemos cómo surge este concepto. En un sistema coordenado (no necesariamente ortogonal), coloquemos una flecha $\vec{P}$ que parta del origen. La punta de la flecha determina un punto en el plano coordenado (fig. 3). A la flecha $\vec{P}$ se le puede asociar las coordenadas (a,b) del punto que determina $\vec{P}$. Aún más, la correspondencia entre las flechas y las coordenadas es biunívoca, lo cual permite "identificar" a la flecha $\vec{P}$ con la pareja (a,b).
Una cosa análoga, con ternas, puede hacerse en el espacio tridimensional.



.   Fig. 3

Hemos dado así otro paso de abstracción, ahora un vector en lugar de ser una flecha es una pareja (o terna en su caso) ordenada de números reales. Ahora los vectores
se suman así

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

y se multiplican por un escalar α de esta forma

$$\alpha\ (a, b)\ =\ (\alpha a, \alpha b)$$

Nótese que por ejemplo la suma así establecida no se parece a la ley del paralelogramo (a menos, claro está, que la interpretemos geométricamente).
A la luz del proceso de abstracción, este nuevo paso, aparentemente nos aleja más de la realidad. Expliquemos un poco la "apariencia". Este paso fue dado con mucha dificultad el siglo pasado y el primero en darlo fue C. Maxwell. Para Maxwell fue *necesario* dar este paso en un problema *concreto* que él tenía: desarrollar la teoría electromagnética, (Kline, 1972. p. 786). Pero el problema que Maxwell se planteaba tenía raíces más profundas, veamos lo que dice Lilley (1965, pag.127):

> *La comunicación inalámbrica, cuyos principios coinciden aproximadamente con los de este siglo, se desarrolló a partir de dos orígenes principales. El incentivo para atacar el problema procedía del mismo origen social que anteriormente el del teléfono, es decir, de la necesidad de comunicaciones rápidas, tanto más cuanto esta modalidad podía proporcionar el medio de comunicación con los buques, hasta entonces no conseguido. La base para la solución fue dada por las investigaciones teóricas de Clerk Maxwell a partir de 1886, que demostraban la existencia de ondas electromagnéticas, que son la base de la radio.*

Muchas de las abstracciones matemáticas son determinadas en última instancia, por razones sociales.
Este paso de abstracción nos aleja de la realidad de la que partimos (problemas de estática, por ejemplo), pero nos acerca más a la realidad en la medida en que puede ser aplicada esta abstracción a problemas como el del electromagnetismo.
Pasemos ahora a otra abstracción que es hasta cierto punto natural.

Hasta ahora nos hemos referido a vectores en el plano y en el espacio y es que nuestras ideas geométricas, intuitivas, parece que no dan para más, por tanto, intentemos desprendernos de nuestros prejuicios geométricos.

Comencemos con un poco de notación. $\mathbb{R}^2$ denotará al conjunto de parejas (x, y), siendo x, y reales. $\mathbb{R}^3$ denotará al conjunto de ternas (x, y, z), con x, y, z, números reales. Hemos visto que los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ pueden ser considerados como vectores. Sea $\mathbb{R}^4$ el conjunto de cuartetas (x, y, z, w) de números reales. ¿No resulta natural considerar como vectores a los elementos de $\mathbb{R}^4$?

Definimos la suma de cuartetos como:

$$(x_1,\ y_1,\ z_1,\ w_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2,\ w_2)$$
$$= (x_1 + x_2,\ y_1 +\ y_2,\ z_1 +\ z_2,\ w_1 +\ w_2)$$

y el producto por un escalar α como:

$$\alpha\ (x, y, z, w)\ =\ (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$$

podemos checar fácilmente que las cuartetas tienen las mismas propiedades que las ternas y las parejas de números reales, y en consecuencia las mismas que las flechas.

Aunque la posibilidad de considerar como vectores a los elementos de $\mathbb{R}^4$ (el espacio de dimensión 4) choca con nuestra intuición geométrica, lo que es cierto es que la cuarta dimensión puede aparecer en problemas concretos. Quizá el ejemplo más conocido sea el del espacio-tiempo. Supongamos que queremos describir el comportamiento de una partícula que se mueve en el espacio (tridimensional). Para poder hacerlo, necesitamos especificar en cada instante de tiempo sus coordenadas en el espacio. En otras palabras, para describir la posición de dicha partícula, necesitamos *cuatro* coordenadas, tres que corresponden a la posición espacial y la cuarta al tiempo.

Una conclusión inmediata es que las coordenadas no tienen por qué representar distancias, pueden de hecho representar lo que sea, como veremos más adelante. Bueno, y ¿por qué no considerar como vectores a los elementos de $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$, o en general, a los $\mathbb{R}^n$, con $n\ >\ 0$?.

Que no tengamos una imagen geométrica de los elementos de $\mathbb{R}^n$ para $n\ >\ 3$, no importa. Lo verdaderamente importante es que los elementos de $\mathbb{R}^n$ se comporten como las “flechas”. Y en efecto, así se comportan; veámoslo,

Sean $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$, y definamos:

$$X + Y = (x_1 +\ y_1, \dots,\ x_n +\ y_n)$$
$$\alpha X\ =\ (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

De la definición de estas operaciones y de las propiedades de los números reales se puede demostrar las siguientes propiedades:

P_1. $X\ +\ Y\ =\ Y\ +\ X$

P_2. $(X\ +\ Y\ )\ +\ Z\ =\ X\ +\ (Y\ +\ Z)$

P_3. $X\ +\ 0\ =\ X\ (0\ =\ (0, 0, \dots, 0))$

P_4. $X + (-1)X = 0$

P_5. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$

P_6. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$

P_7. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

O sea, que efectivamente los elementos de $\mathbb{R}^n$ se comportan como las "flechas".

Hemos dado un formidable paso de abstracción. Nos hemos desprendido de lo que nos quedaba de intuitivo y geométrico, pero hemos conservado lo fundamental: las operaciones y sus propiedades.
Tenemos la pauta para hacer otra gran abstracción, pero vale la pena que nos preguntemos si no nos estamos yendo muy lejos y sin ningún sentido. ¿Qué importancia puede tener que los elementos de $\mathbb{R}^n$ sean vectores? Veremos algunos ejemplos que nos pueden dar idea de la importancia de $\mathbb{R}^n$.

4. Los espacios de dimensión N y la realidad

En Física. Hemos visto en el párrafo anterior que $\mathbb{R}^4$ nos permite describir el movimiento de una partícula. Pero nos falta algo, con cuatro parámetros podemos describir su posición en un instante dado, pero no sabemos que velocidad lleva. Para saber esto, necesitamos saber las componentes de la velocidad V_x, V_y, V_z en las direcciones X, Y, Z, respectivamente. Así para poder describir tanto la posición como la velocidad del punto en cualquier instante, necesitamos 7 parámetros, es decir, necesitamos trabajar con el vector $(X, Y, Z, V_x, V_y, V_z, t)$ en $\mathbb{R}^7$. Pero ¿con qué aceleración se mueve la partícula? Para contestar esto, se requiere de otros 3 parámetros, esto es, trabajar en $\mathbb{R}^{10}$. Bueno, ahora sí no se trata de una partícula, sino de un sistema de partículas que, por ejemplo, va girando alrededor del centro de masa del sistema, necesitamos trabajar con $\mathbb{R}^n$ para alguna n adecuada, que depende del número de partículas del sistema. Podemos asegurar que para conocer mejor el movimiento de una partícula o de un sistema de partículas, es preciso utilizar más parámetros, es decir, trabajar con vectores de dimensión cada vez más grande. Podríamos dar una vasta variedad de problemas físicos en donde aparece $\mathbb{R}^n$, pero por un lado son por lo general complejos, y por otro lado no queremos hacerla muy cansada.

En Economía. Los vectores son utilizados frecuentemente en ciertos modelos económicos. Hay vectores propios $P = (P_1, \ldots, P_n)$ donde P_k es el precio de un artículo A_k. Hay vectores ganancia, vectores consumo, vectores producción, etc. (Kemeny, J. Snell, J. y Thompson, G., 1972; Gale, D. (1972)).

En Biología. También en esta ciencia hacen acto de presencia los vectores. En ecología, en genética, en dinámica de población, entre otras ramas, se hace uso en ciertas ocasiones de los vectores, un vector $(P_1, \ldots, P_n)$ puede ser un vector población donde cada P_k sea la cantidad de individuos de la especie E_k en un ecosistema Gale, D., 1972; Batschelet, E., 1971).

En Antropología. Han sido utilizadas técnicas vectoriales para determinar las reglas matrimoniales en ciertas sociedades primitivas (Lilley, S. (1965).

En La Vida Cotidiana. Supongamos que 3 personas llegan a un restaurante donde sólo se encuentran tortas y refrescos. Para calmar el hambre una de las personas pide 2 tortas y un refresco, la segunda 3 tortas y 2 refrescos, y la tercera una torta y un refresco. Piden en total 6 tortas y 4 refrescos. ¿Qué tiene que ver esto con vectores? La respuesta es interesante e ilustrativa.

Si T representa una torta y R un refresco, podemos escribir simbólicamente el consumo de cada persona así: la primera consume $2T + R$, la segunda $3T + 2R$ y la tercera $T + R$. El consumo total será:

$$\begin{array}{r} 2T + R \\ 3T + 2R \\ T + R \\ \hline 6T + 4R \end{array}$$

O sea que podemos pensar a los consumos individuales como vectores y el consumo total es la suma de estos vectores. Pero obsérvese que, si únicamente tuviésemos la noción de vector físico o geométrico, sería verdaderamente descabellada la idea de considerar a los consumos como vectores.

Realmente, lo importante no es considerar a los consumos como vectores, sino considerar a T y R como vectores, puesto que cada consumo individual es una combinación lineal (**6**) de T y R. Bueno, nada nos impide tener una imagen geométrica de nuestros vectores, véase la figura 4. Esto es, ¡hemos representado a una torta y a un refresco por medio de "flechas"!.

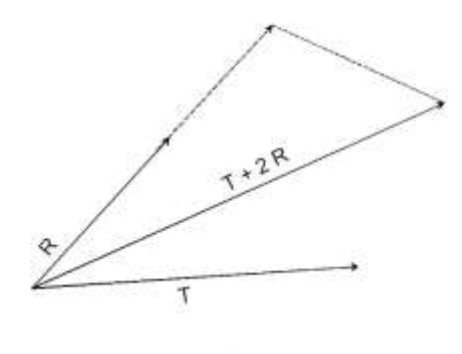


Fig. 4

La cuestión va incluso más allá. En lugar de $2T + R$ podemos pensar en la pareja $(2, 1)$ en lugar de $3T + 2R$ en $(3, 2)$ y en lugar de $T + R$ en $(1, 1)$. El consumo total será: $(2, 1) + (3, 2) + (1, 1) = (6, 4)$.

Podemos pensar en los consumos individuales como elementos de $\mathbb{R}^2$. Es decir, como vectores algebraicos. Este ejemplo, aunque parezca simple, es un ejemplo cotidiano. Cuando vamos a una taquería, frecuentemente nos muestran una lista como la de la figura 5. Los espacios en blanco son ceros. Cada consumo, por mesa, es un vector, en este caso, en $\mathbb{R}^{43}$. Al finalizar el día, se requiere saber cuántos tacos de bistec, de costilla, etc., han

vendido, para lo cual les basta sumar los vectores de consumo para obtener el consumo diario. Podemos decir que los "taqueros" manejan vectores sin saberlo.

La Tacoteka
M. Angel de Quevedo 121 Chimalistac
Reg. CIRS-400724

TACOS AL CARBON						
de bistec	5.00					
de bistec con rajas	5.00					
de costilla	5.00					
de chuleta	5.00					
de chuleta con rajas	5.00					
de cecina (lomo adobado)	5.00					
de chorizo	5.00					
brochetas de filete	10.00					
campechanas (chuleta con chorizo)	5.00					
costilla tacoteka (corte especial con ensalada de berro)	18.00					
QUESOS FUNDIDOS						
cazuelita de queso	6.00					
choriqueso	9.00					
cecina con queso	9.00					
chuleta con queso	9.00					
chuleta especial con queso	12.00					
queso especial con tortilla de harina	12.00					
chiles rellenos de queso	9.00					
QUESADILLAS						
quesadillas de queso	2.50					
quesadillas de flor de calabaza	2.50					
quesadillas de papa	2.50					
quesadillas de papa con chorizo	2.50					
quesadilla especial tacoteka tortilla de harina y aguacate	2.50					
ESPECIALIDADES						
pozole rojo	12.00					
pancita	12.00					
taco de moronga	3.50					
cazuela de frijoles	4.00					
cazuela de frijoles con chorizo	8.00					
cazuela de frijoles con cecina	8.00					
cazuela de frijoles con chuleta	8.00					
chicharrón en salsa verde	8.00					
sopa especial de pollo	10.00					
plato tacoteka (chuleta, chorizo, morrón, aguacate tortilla de harina)	12.00					
parrillada mixta	29.50					
parrillada tacoteka	35.00					
aguacate relleno (con chuleta y cecina)	18.00					
BOTANA DE GUACAMOLE CON CHICHARRÓN	12.00					
BEBIDAS						
cerveza de barril	6.00					
jugo de naranja natural	5.00					
refrescos	2.00					
café de olla	2.00					
agua mineral	2.00					
POSTRES						
PAY(queso con piña, manzana, nuez)	6.00					
FLAN(de queso, nuez, coco)	6.00					
CIGARROS						

21-11-74-1-3

TOTAL $

Fig. 5 Un vector en $\mathbb{R}^{43}$ (de la Tacoteka)

5. La noción algebraica de vector (II)

Hemos hecho hasta ahora varias abstracciones. Partimos de una flecha representando una fuerza. Luego le quitamos el ropaje físico y manejamos las flechas geométricas.
Después las flechas se convierten en colecciones de números.
Lo que hay en común en cada una de las interpretaciones, son las propiedades de los vectores. Estos sugieren ya el camino para la siguiente abstracción, pero antes son necesarias algunas observaciones.
Cuando hablamos de la propiedad de los vectores, no nos referimos a la propiedad de *un* vector (o de cada uno de ellos). Las propiedades se refieren a las relaciones que guardan entre sí los elementos de un conjunto. Dicho de otra manera, no podemos decir qué es un vector sin referirnos a sus relaciones con los otros vectores; *un* vector no tiene propiedades "intrínsecas". Así que sólo podemos decir que un vector es un elemento de un conjunto que tiene ciertas relaciones.
Nótese que en cada paso de abstracción que hemos dado, le hemos restado importancia a la *forma concreta* que adoptan los vectores (fuerzas, flechas, o colecciones de números), y hemos dejado las propiedades esenciales, las "intrínsecas", pero no de un vector, sino de toda la colección de vectores.

Nada nos impide ahora explorar la posibilidad de que existan conjuntos distintos al de las flechas y de las colecciones de números, pero que tengan las mismas propiedades que ´estas. A estos conjuntos se les llama espacios vectoriales. Precisemos:

DEFINICIÓN. Sea V un conjunto donde se tiene dos operaciones: la suma de los elementos de V, y la multiplicación de números reales por elementos de V. Se dice que V es un espacio vectorial real, si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $a + b \in V$
2. $\alpha a \in V, a \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ denota a los números reales)
3. $a + b = b + a$
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$
5. *Existe un elemento*$\theta \in V \mid a + \theta = a \quad \forall\, a \in V$
6. *Para cada* $\forall\, a \in V, a + (-1)a = \theta$
7. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
8. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
9. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
10. $1 \cdot a = a$

Y ahora sí podemos precisar la noción más abstracta de vector.

DEFINICIÓN. A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores.
Algunos ejemplos los dejamos como ejercicio.
Ejemplo 1. Sea $V = \{f : [a, b] \to R\}$. Es decir, V es el conjunto de funciones reales
Ejemplo 2. Sea V el conjunto de matrices 2×2.
Definamos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Entonces V es un espacio vectorial.
Ejemplo 3. Sea V el conjunto de sucesiones

$$X = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$$

Sea $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots\}$. Definamos:

$$X + Y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots\}$$
$$\alpha X = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots \alpha x_n, \ldots\}$$

Entonces V es un espacio vectorial.

Los espacios vectoriales sobre campos finitos tienen aplicaciones por ejemplo en el diseño de investigaciones agrícolas (Fletcher, 1974), o en en circuitos cerrados y en comunicación (Fletcher, 1972).
Resumamos. Para llegar al concepto más abstracto de vector, se hacen necesarios varios pasos de abstracción. En general los pasos de abstracción se dan por necesidad, ya sea teórica o práctica. En particular en vectores, algunos de estos pasos tienen sus raíces en necesidades sociales.
Por otro lado, si bien en cada paso de abstracción nos desprendemos de aspectos concretos, particulares, los resultados de la abstracción son enormes, podemos aplicar
los conceptos a una gran variedad de nuevas situaciones.
Esperemos que esto muestre lo poderosa que resulta la abstracción y el papel que esta tiene en la evolución de los conceptos. En particular se ha visto que la variedad de "definiciones" que se conocen, corresponden a etapas en la evolución del concepto de vector.

Conclusiones

A través de la experiencia, poco a poco, se hace uno consciente que los conceptos se asignan de forma desigual. Parece que el estudiante ha logrado comprender el meollo del asunto. De pronto surge una intervención que refleja una incomprensión de aspectos que nos parecen claros, a veces triviales. Esto nos sorprende y a veces nos molesta. Preguntamos y repreguntamos la definición, y aunque la respuesta sea correcta la confusión subsiste. Nos damos cuenta entonces de que *la definición no es el concepto*. El concepto consiste en vivencias, de parcialidades, de intuiciones que se sintetizan en una definición o en un teorema, pero rebasan aquello. Y he aquí que la definición no es sólo un resultado sino eso y mucho más.
Ante la pregunta, mal hecha a propósito, ¿Qué es un vector?, las respuestas, sorprendiéndonos, se multiplican:

- Es una fuerza
- Es una flecha
- Es una magnitud con dirección y sentido.
- Es un segmento de recta dirigido
- Es una pareja (terna ó eneada) ordenada de números
- Es un elemento de un espacio vectorial

Lo interesante de la situación es que -aparte de ser una pregunta hecha a alumnos de 3er. Semestre de la Facultad de Ciencias (físicos, matemáticos y actuarios)- algunas "definiciones" son contradictorias entre sí. Un segmento dirigido es un conjunto infinito de puntos y una pareja ordenada de números es un conjunto que consta de un solo elemento.
No deja de llamar la atención que los alumnos por lo general estén de acuerdo con estas "definiciones", pero que la mayoría de ellos descubran tales contradicciones y que les cueste trabajo encontrar una explicación coherente de ello (7).
Esta confusión tiene una virtud pedagógica, centra la atención del alumno en cuanto que les cuestiona sus conocimientos. Cuestiona así mismo, la forma en la cual los han adquirido y representa un reto pedagógico: para ellos aclarar el concepto, para el profesor, proporcionar los elementos aclaratorios.
Siempre me ha sorprendido la facilidad con que se representa una fuerza como una flecha con magnitud, dirección y sentido, lo cual nos parece natural pero que pensándolo bien no es tan fácil de hacer: ¿dónde y cuándo vemos esa flecha al empujar un objeto? Me sorprende,

aún más, que una velocidad o aceleración se interprete tan fácilmente como un vector –pensado como una "flecha"- cuando estamos acostumbrados a interpretar a las velocidades y aceleraciones como escalares (por ejemplo, lo que marca el velocímetro de un automóvil). Esto merece toda una interpretación física, distinguiendo, por ejemplo, entre *velocidad y rapidez*.

Es frecuente que, a cierto nivel, se maneje el concepto de vector como algo que tiene magnitud, dirección y sentido, digamos como una "flecha". La metáfora no es del todo afortunada, aunque parece acertada.

Afrontemos esta situación realista (que yo utilizo en mis clases y conferencias): Tomemos un arco y una flecha de verdad, y pongamos la flecha en posición de tiro al momento de disparar la flecha, esta tiene una magnitud (su longitud, o bien la magnitud de la fuerza con la que es lanzada), una dirección y un sentido; pero *no* es un vector. Hoffman discute de una manera interesante este problema.

> *El singular incidente de la tribu vectorial. Se cuenta que una vez existió una tribu de indios que creían firmemente que las flechas eran vectores. Si querían matar a un ciervo que se encontraba directamente al Noroeste, no disparaban una flecha en dirección al Noroeste, sino que disparaban dos flechas simultáneamente, una directamente hacia el Norte y otra directamente hacia el Oeste, confiados en que la poderosa resultante de las dos flechas mataría al ciervo. Los científicos escépticos han dudado de la veracidad de este rumor, basándose en que no se ha encontrado la más ligera huella de la existencia de tal tribu. Ahora bien, la absoluta desaparición de la tribu, a consecuencia de la inanición, es precisamente la que cualquiera hubiera esperado, dadas las circunstancias. Y puesto que la teoría que afirma que la tribu existió confirma dos cosas tan diversas como "el comportamiento no vectorial de las flechas_ el "principio darwinista de la selección natural", no es, seguramente, una teoría que pueda rechazarse a la ligera (*Hoffman, 1966*).*

Lo anterior muestra de inmediato que la pregunta ¿qué es vector? está mal planteada. No se puede hablar de *un* vector en sí mismo, sino de un conjunto de entes con determinadas reglas de combinación y cierta propiedad de dichas operaciones.

Un aspecto de este asunto, que es poco tratado en los libros de texto, es el referente al paso de vectores fijos (como son las fuerzas en Estática, donde es importante el punto de aplicación) a los "vectores libres". Una presentación de ellos aparece en "´Algebra Lineal I", Open University. McMillan (1974) y en J. López Estrada, "Introducción a Vectores", notas mimeografiadas, Facultad de ciencias, UNAM.

Cuando se adquieren los conceptos de forma abstracta, se lleva una sorpresa al constatar la amplitud de su aplicación. En lo particular, en cuanto a vectores, una experiencia hasta cierto punto divertida es la referente al ejemplo E del apartado 4 de "Sobre el Concepto de Vector". En dicho ejemplo, como el lector recordará, hacemos mención a un vector en R^{43}. Pues bien, quise demostrar a los alumnos este vector y me propuse hacerme de un ejemplar de la orden de servicio de una "taquería" (figura 5 de ese trabajo). Como ´estas estaban foliadas, los meseros se negaron a proporcionarme un ejemplar de ellas. Hube de esperar al dueño del negocio y hablar con ´el. El señor me ofrecía una nota de consumo, pero no entendía el porqué de mi interés en la orden de servicio. Tuvo que intervenir El Moi, diciendo que yo lo utilizaría

como material didáctico, para que se me fuese facilitado, aunque con una actitud de perplejidad por parte del dueño. ¡Me era imposible explicar mis intenciones!

Sin embargo, para los estudiantes de una Facultad de Ciencias, este ejemplo resulta ser muy sencillo, y por eso divertido y a la vez muy dramático, pues logran establecer una conexión entre un concepto abstracto y situaciones bastante cotidianas. De hecho, este ejemplo es el eje de muchas de mis presentaciones del concepto de vector.

Visto bien, este ejemplo hace que reflexionemos sobre nuestro concepto de “representación”. Estamos tan acostumbrados a la representación geométrica que nos parece imposible tener una representación concreta (que no sea una figura en el plano o en el espacio tridimensional). Los alumnos se ríen escépticos cuando prometo traer a la siguiente clase un vector en $\mathbb{R}^{43}$ y ¡de color negro!

Por otro lado, este ejemplo nos hace ver que podemos asociarle una flecha a lo que nosotros queramos (por ejemplo: un taco, una torta, un refresco o una combinación de ellos, lo que constituye el “consumo” de un restaurante), rompiendo así la idea tan generalizada, y limitada, de que una flecha representa fuerzas, velocidades o aceleraciones.

Los posibles “consumos” en un restaurante *n*o forman por sí mismos un espacio vectorial. Las razones son varias. Supongamos que se consumen tres tipos de alimentos (podemos tomar tacos, tortas y refrescos, de dudoso contenido alimenticio). Llamémosles $A, B\ y\ C$.

Cada consumo individual representa una terna de números digamos (a, b, c). El problema mismo indica que $a, b, c\ \geq O$, donde a, b, y c son por los general números naturales, porque usualmente no se venden taco y medio o un cuarto de refresco.

Lo que sí podemos afirmar es que cada consumo (a, b, c) pertenece a $\mathbb{R}^3$, y puesto que la forma de sumar los consumos y de multiplicarlos por escalares son compatibles con las de R3, podemos afirmar que los consumos son vectores.

Para lograr esto, hemos efectuado varias abstracciones: $3tacos + 5tortas + 2refrescos \rightarrow 3A + 5B + 2C \rightarrow (3, 5, 2)$

Esto es, hemos utilizado notaciones adecuadas para desprenderse del contenido específico. Ahora sí el consumo $(3, 5, 2)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

Aquellos que conocen el producto escalar de dos vectores reconocerán fácilmente que la “cuenta” del restaurante se obtiene efectuando el producto escalar entre el vector “consumo_ el vector de precios respectivos.

¿Puede el lector sacarle más jugo al ejemplo?, ¿proponer por analogía más ejemplos?, ¿puede detectar en la vida cotidiana algunos otros? Ideas y sugerencias serán bien recibidas.

ESPACIOS VECTORIALES CURIOSOS

La esencia de la Matemática radica en su libertad. Georg Cantor.

I Introducción

Cuando uno estudia ciertas estructuras matemáticas y encuentra en las clases de nuestros maestros o en los textos, ciertos ejemplos de ellas, se adquiere cierta satisfacción al clarificar cada vez más de qué se trata. Como todo conocimiento humano, las matemáticas surgen de un acontecimiento de la realidad; aunque las más de las veces, en el proceso de abstracción y sobre todo cuando se nos presenta un hecho ya terminado, dejamos de percibir esa relación. No es nuestro propósito en este sencillo trabajo, hacer una discusión filosófica sobre los hechos señalados en el párrafo anterior; sin embargo, queremos presentar algunos ejemplos

de espacio vectorial que surgen de un hecho concreto, el cual se podría considerar como una suerte de "maquinita" generadora de ellos.
En resumen, el propósito del presente trabajo es el siguiente: dados conjuntos A y B con la misma cardinalidad, y donde uno de ellos es espacio vectorial, construir en el otro conjunto la aritmética necesaria para que a su vez sea espacio vectorial.

II La esfera como espacio vectorial

Si consideramos una esfera en $\mathbb{R}^3$, resulta que aquella no es un espacio vectorial cuando se utilizan las operaciones acostumbradas en él, esto es, las que usamos en la geometría analítica. De lo anterior es fácil convencerse, pues de que la suma no es cerrada, ni lo es tampoco el producto por un escalar distinto de 1 (véase figura 7).
Sin embargo, con "operaciones adecuadas" -que evidentemente no serán las usuales- resulta que cualquier esfera en $\mathbb{R}^3$, es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.
Primero haremos ver que en una esfera a la cual le quitamos un punto le llamaremos "esfera agujerada" podemos definir operaciones que la convierten en espacio vectorial. A manera de ejemplo pensemos en una esfera E en R^3 con centro en $(0,0,\frac{a}{2})$ de radio $\frac{a}{2}$ (ver figura 8) donde $a > 0$. Sea E^1 la esfera agujerada que resulta de E al quitarle el punto $(0,0,a)$. Ahora consideramos la función f descrita geométricamente en la figura 9 y sea g su viceversa.
Analíticamente f y g viene dadas por las siguientes expresiones:

$$f\ (x,y,z) = \frac{1}{a - z}(ax,ay,0)$$

$$g(x,y,0) = (x + \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2 + a^2}, y + \frac{x^2y + y^3}{x^2 + y^2 + a^2}, -\frac{a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + a^2}$$

En base a dichas funciones definamos las siguientes operaciones para los elementos de E^1:
a) $\bar{e_1} \oplus \bar{e_2} = g(f(\bar{e_1} + f(\bar{e_2}))$ donde $\bar{e_1}$ y $\bar{e_2}$ son elementos de E^1 y $+$ es la suma usual de vectores (véase figura 10).
b) Si $\alpha \in R, \alpha^*\bar{e_1} = g(\alpha^\circ f(\bar{e_1}))$ donde $^\circ$ es el producto usual de un escalar por un vector (véase la fig. 11).

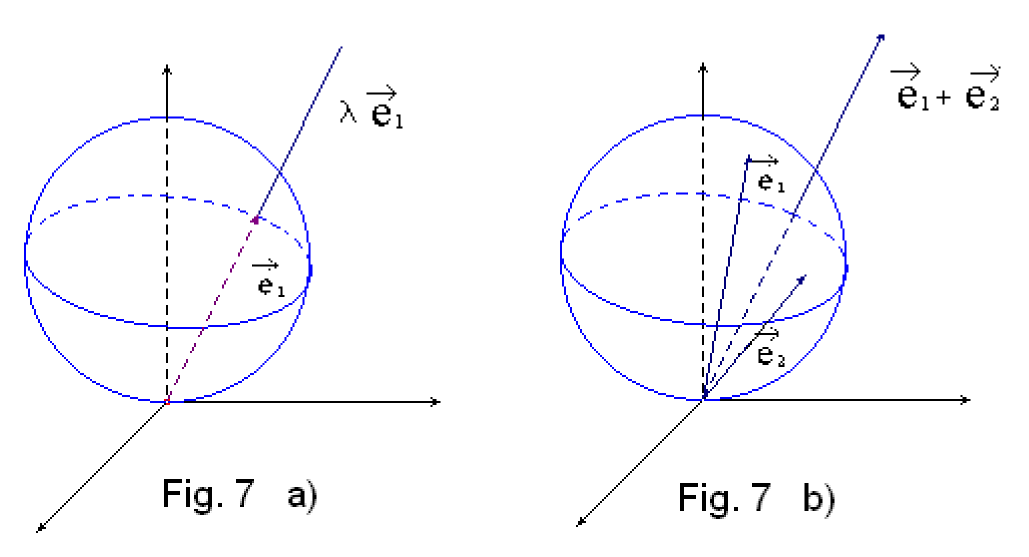
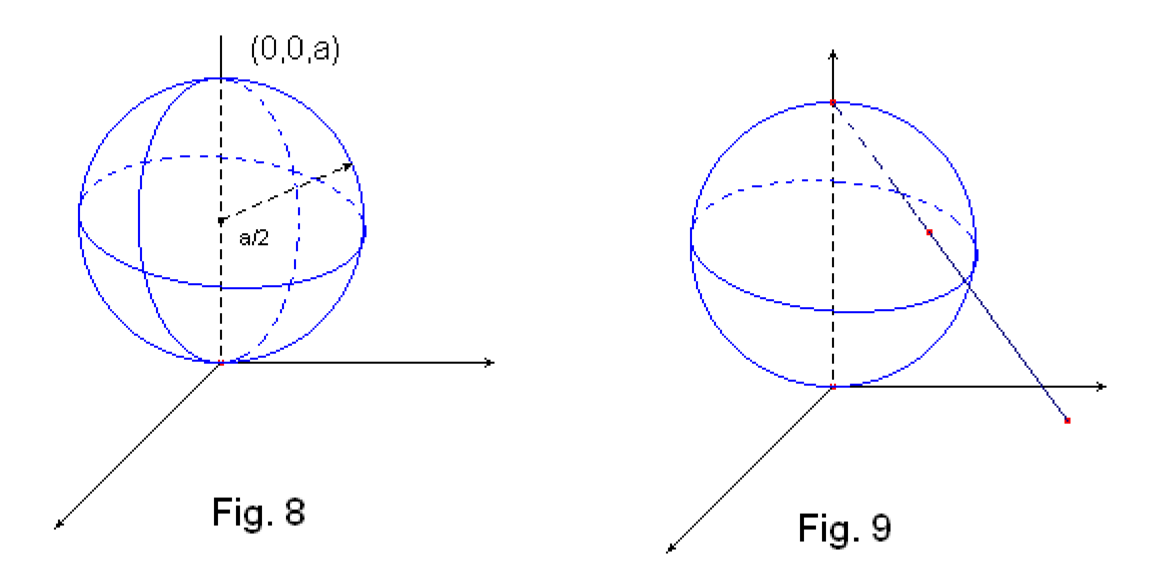


Fig. 7 a) Fig. 7 b)



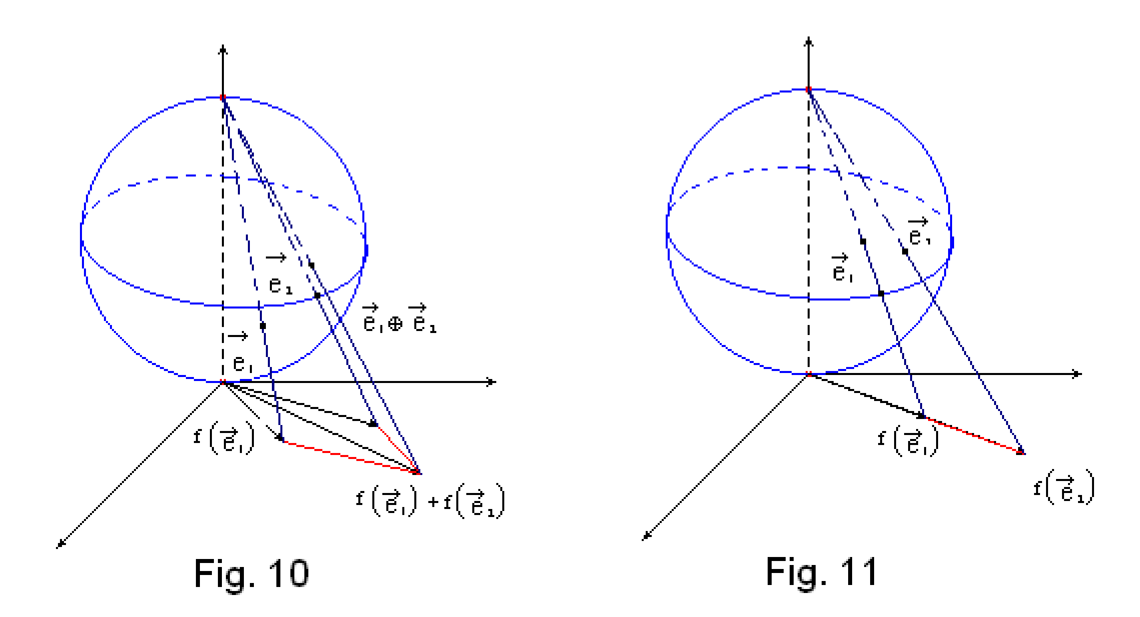
Resulta que, con las operaciones así definidas, ¡ E^1 *es un espacio vectorial de dimensión* 2!. Esto es intuitivamente claro en las figuras 10 y 11, y puede ser verificado utilizando las expresiones analíticas de f y g; pero preferimos obtener este resultado como consecuencia de un procedimiento general mediante el cual se pueden construir espacios vectoriales “especiales_ que veremos en el siguiente apartado. Pero sí queremos señalar aquí la historia fundamental de este procedimiento. En lo que hicimos, la idea fue construir E^1 operaciones que la convierten en espacio vectorial, haciendo uso de la función biyectiva f que hay entre E^1 y $\mathbb{R}^2$. Resulta que así f es lineal (lo cual se ve fácilmente de (a) y (b)) y por lo tanto se establece un isomorfismo 8 entre E^1 y $\mathbb{R}^2$.

Veremos en el apartado IV que también a la esfera completa se le puede dar una estructura de espacio vectorial, pero primero pasemos a ver el procedimiento general.

En este apartado generalizaremos el proceso descrito en el apartado anterior.

TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un campo C y B un conjunto con la misma cardinalidad que V.

Entonces B se puede considerar como un espacio vectorial sobre C.



Demostración. Existe al menos una función biyectiva $F : V \rightarrow B$. Para que el conjunto B sea un espacio vectorial, se requiere operaciones definidas en ´el, por lo que empezamos por definirlas. Sean a, $b \in B$ y $\alpha \in B$, entonces definimos:

a) $a \oplus b = F(F^{-1}(a) + F^{-1}(b))$, donde $+$ denota la suma en V

b) $\alpha * a = F(\alpha^{\circ} F^{-1}(a))$, donde ° denota el producto de un elemento de C por otro de V.

Nótese que las operaciones anteriores están bien definidas, y que

$$F^{-1}(a \oplus b) = F^{-1}(a) + F^{-1}(b)$$
$$F^{-1}(\alpha * a) = \alpha^{0} F^{-1}(a)$$

Una vez definidas las operaciones hay que verificar que estas satisfacen los axiomas de espacio vectorial. Primeramente, por construcción, se satisfacen las propiedades de cerradura, así que basta con demostrar el resto de las propiedades.

1. $a \oplus b = F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}(b)\right)$
   $= F\left(F^{-1}(b) + F^{-1}(a)\right)$
   $= b \oplus a$

2.$a \oplus (b \oplus c) = F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}(b \oplus c)\right)$

$$= F\left(F^{-1}(a) + \left(F^{-1}(b) + F^{-1}(c)\right)\right)$$
$$= F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}(b) + F^{-1}(c)\right) =$$

3. Sabemos que existe $\theta \in V$tal que

$$v + \theta = \theta + v = v, \forall v \in V$$

Ahora sea $a \in B$,

$$a \oplus F(\theta) = F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}\left(F(b) + F^{-1}(\theta)\right)\right)$$
$$= F(F^{-1}(a) + \theta)$$

$$= F\left(F^{-1}(a)\right) = a$$

Análogamente $F(\theta).\oplus a = a$. Entonces $F(\theta)$ es el neutro aditivo de la suma.
4. Sea $a \in B$,

$$a \oplus [(-1) * a] = F\left(F^{-1}(a) + F^{-1}\left((-1) * a\right)\right)$$
$$= F\left(F^{-1}(a) + (-1) \quad {}^0F^{-1}(a)\right)$$
$$= F(\theta)$$

Análogamente $[(-1) * a] \oplus a = F(\theta)$. Así que el inverso aditivo de a es $(-1) \ * a$
5.

$$(\alpha\beta) * a = F\left((\alpha\beta) \quad {}^0F^{-1}(a)\right)$$
$$= F\left(\alpha \quad {}^0F^{-1}(\beta * a)\right)$$
$$= \alpha * (\beta * a)$$

Como B es espacio vectorial sobre C y F^{-1} es lineal, tenemos el siguiente
COROLARIO. B y V tiene la misma dimension.9 Pasemos a ver algunos ejemplos particulares de espacio vectoriales "especiales "que se obtienen aplicando el teorema anterior.

IV Ejemplos

El Teorema del apartado anterior nos proporciona una vasta colección de espacios vectoriales "raros", así que daremos sólo unos cuantos ejemplos.
1. *Ejemplo 1.* La esfera agujerada del apartado II
2. *Ejemplo 2.* Cualquier esfera $\mathbb{R}^3$. La esfera E definida en el apartado II tiene la misma cardinalidad que la esfera agujerada E^1, por lo tanto E puede ser considerada como un espacio vectorial. Además, cualquier esfera $\mathbb{R}^3$ tiene la misma cardinalidad que E, así que también puede pensarse como espacio vectorial.
3. *Ejemplo 3.* Georg Cantor descubrió que cualquier $\mathbb{R}^n$ -entendido como el conjunto de todas las eneadas ordenadas de números reales- tiene la misma cardinalidad que cualquier $\mathbb{R}^m$. Sabemos además que $\mathbb{R}^m$ con las operaciones usuales tiene dimensión m.
Por el Teorema del apartado anterior, $\mathbb{R}^n$ puede ser pensando como un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^m$ *¡para cualquier m natural!* Evidentemente, cuando $n \neq m$, las operaciones en $\mathbb{R}^n$ no pueden ser las usuales. Como caso particular a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ podemos darle estructura de espacio vectorial de forma tal que su dimensión sea igual al número natural que nosotros queramos.
Ejemplo 4. Como cualquier esfera en $\mathbb{R}^3$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}^2$, entonces a esta esfera se le puede pensar como un espacio vectorial de dimensión (finita) que nosotros queramos.
Ejemplo 5. Un disco abierto (o cerrado) en $\mathbb{R}^2$ con centro en O, tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}^2$, así que se le puede dar una estructura de espacio vectorial, isomorfo a $\mathbb{R}^2$. De esta manera el disco, que es un conjunto acotado, es un "modelo" de $\mathbb{R}^2$ que no es acotado.
Ejemplo 6. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales puede pensarse como un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ de los racionales, ya que $\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo y $\mathbb{N}$ tiene la cardinalidad que $\mathbb{Q}$.
Ejemplo 7. Cualquier conjunto finito con un número primo p de elementos, se puede considerar como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$, el campo de las clases residuales módulo p.

Ejemplo 8. Si p es primo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$ es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{Z}_p$. Así que cualquier conjunto finito con p^n elementos pueden ser considerados un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$, de dimensión n.

Los ejemplos anteriores, sirven de base para seguir construyendo espacios vectoriales. Piénsese en un conjunto de cardinalidad p^n, siendo p un primo, cuyos elementos son espacios vectoriales. Ese conjunto puede ser considerado un espacio vectorial, con la característica de que sus vectores son espacios vectoriales.

Consideramos ahora el conjunto $V = \{\mathbb{R}^n | n \in \mathbb{N}\}$ que es numerable, y por lo tanto de la misma cardinalidad que $\mathbb{Q}$, que es un espacio vectorial; entonces a V le podemos dar estructuras de espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$; o en general si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ donde $i \in \mathbb{N}$ y las $a'_i s$ son cualquier cosa, A puede pensarse como espacio vectorial.

En fin, si en una tarde de verano, en un parque lavado por la lluvia, viéramos a una bella mujer que camina silbando, al mirar sus ojos, se podría pensar en . . .

V Comentario

Este trabajo es fruto del esfuerzo colectivo de los cursos de Algebra Lineal impartidos por el Prof. Humberto Madrid cuyos métodos aportan algo esencial en la enseñanza de las matemáticas: la claridad. Las ideas de este trabajo son análogas a las utilizadas en los cursos del Prof. Humberto Madrid. En ellas, en un momento determinado se llega a la necesidad de establecer operaciones con matrices. Esto se logra estableciendo una función biyectiva entre matrices y un conjunto adecuado de transformaciones lineales (que es un espacio vectorial). Haciendo uso de dicha biyección, se definen las operaciones entre matrices, y el conjunto de matrices adquiere una estructura de espacio vectorial.

Mi sincero agradecimiento a Humberto por toda la ayuda que, de él recibí para elaborar este trabajo, pero particularmente por todo lo que nos ha enseñado dentro y fuera de su cátedra.

Notas a espacios vectoriales curiosos

Estamos acostumbrados a ejemplos geométricos y no geométricos de espacios vectoriales. De los primeros, tenemos las rectas, planos e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$. De los otros espacios de funciones, matrices, etc., etc. De vez en cuando, ejemplos de espacios vectoriales sobre campos finitos. Pero la imagen geométrica que nos viene a la mente son los subespacios en $\mathbb{R}^n$ -los más cercanos a nuestras percepciones - y los imaginamos algo así como “chatos” (copia de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$,o $\mathbb{R}^k$).

Difícilmente podríamos pensar en un espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ como un conjunto acotado, simplemente porque exigimos que *x* sea elemento de ese espacio, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y toda $x \in \mathbb{R}^n$. En este trabajo se muestra que si ponemos un tanto de imaginación, esferas, segmentos, o casi lo que sea, puede ser un espacio vectorial, rebasando en mucho las imágenes concretas que de ese concepto podemos tener.

Se enfrenta uno al dilema; enunciar el resultado, el teorema, o presentarlo de tal forma que tengan alguna idea de dónde surge tal resultado. Si bien, dicho resultado puede provenir de diversas necesidades, me parece conveniente mostrar, con algún detalle al menos, una de ellas. Una forma de introducir las operaciones con matrices (y esto depende del público y las circunstancias) es hacerlo a través de trasformaciones lineales.

A final de cuentas, si uno dice que las matrices se multiplican así, de esa forma medio extraña, (a diferencia de la suma), me parece que por lo menos se merece una explicación. 11

En mis cursos de Algebra Lineal, se presenta a una explicación de ello mediante transformaciones lineales, presentación que además conlleva la idea de isomorfismo entre espacios vectoriales. Esto es una ventaja, pues da pie a la introducción del concepto de isomorfismo.
La idea es la siguiente: teniendo familiaridad con las matrices como una notación eficaz para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se plantea la necesidad de encontrar la inversa de un matriz, A^{-1}, para resolver tales sistemas.12 Surge entonces la pregunta ¿cómo multiplicar matrices? (para que tenga sentido A^{-1}, se requiere que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$). Como los estudiantes ya conocen el ´algebra de funciones, resulta más o menos fácil replantear el problema de resolver $Ax = b$, en término de funciones; encontrar una función F, tal que $F(x) = b$. Puesto que sabemos efectuar la composición de funciones podemos "transplantar" dicha idea para definir el producto de matrices. Por otro lado, no es ésta la única presentación que puede hacerse del producto de matrices existe una gran variedad de situaciones que llevan a ello.13
3. El compañero J. Carmona se sorprendió bastante al conocer el vector $\mathbb{R}^{43}$ representado en una hoja de papel en forma de orden de servicio de un restaurante. De aquí le surge una duda: ¿el plano puede ser "una representación" de $\mathbb{R}^{43}$ o de otros espacios? De la duda surge la discusión, de ahí alguna ideas vagas y dispersas que en un momento dado adquieren claridad y coherencia cuando él demuestra que a una esfera agujerada se le puede dar una estructura de espacio vectorial (utilizando las ideas delineadas en la nota anterior). El camino quedó abierto y en base a otras discusiones se logran otros ejemplos interesantes, y se le puede seguir.
Sería sumamente valioso generar algunos ejemplos concretos, que fuesen atractivos y donde las operaciones obedecieran a reglas sencillas, para que ellas mismas pudieran ser utilizadas para motivar el concepto de espacio vectorial.
4. En este trabajo queda claro que aunque podemos interpretar a una biyección simplemente como un cambio de nombre, los resultados pueden ser sorprendentemente extraños. Huelga decir que lo hecho para espacios vectoriales puede hacerse igualmente para grupos, anillos, campos, espacios métricos, espacios topológicos, etc., etc. ¿Puede el lector intentarlo?

BIBLIOGRAFÍA

Batschelet, E. (1971). *Mathematics for the Life Scientists*. Springer Verlag. USA

Fletcher, T. J. (1972). *Linear Algebra*. Ed. Van Nostrand

Fletcher, T. J. (1974). *Didáctica de la Matemática Moderna*. En la enseñanza media. Ed. Teide. Barcelona España.

Gale, D. (1972). *The Theory of Linear Economic* Models. University of Chicago Press.

Hoffmann, B. (1966). About vectors. Ed. Prentice-Hall. USA. ISBN 10: 0486604896 ISBN 13: 9780486604893.

Kemeny, J. G. Snell, J. L. y Thompson, G. L. (1972). *Introducción a las matemáticas finitas*. CECSA México.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Vol. 1*. Oxford University Press. USA. ISBN-13: 978-0195061352

Lilley, S. (1965). *Hombres, Máquinas e Historia*. Ed. Ciencia Nueva, Madrid España.

López-Estrada, J. Apuntes de Geometría Analítica (copias mimeografiadas). Inédito. Facultad de Ciencias UNAM.

Searle, S. R. (1968). Matrix Algebra for Biological Sciences. *Journal of Pharmaceutical Sciences*. Volume 57, Issue 3, Page 536. Wiley Sons.

Notas

[1]En Mérida a una estudiante del último año de las matemáticas les parecía increíble que un concepto "tan abstracto" como el de grupo tuviera aplicaciones y más le admiraba que el concepto pudiera ser motivado.

[2]Por supuesto que tenemos tema de conversación al respecto. En otra oportunidad hablaremos de ello, particularmente del concepto de independencia lineal tan íntimamente ligado a la geometría de los espacios vectoriales.

[3]Hay más ejemplos, éste aparece publicado en una selección de trabajos de alumnos: "Cuentos, Variaciones e Invenciones sobre Algebra Lineal". Comunicaciones Internas, No. 5 (1979). Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM

[4]En particular, este trabajo fue motivado por Paty Colunga quien quería saber qué es un vector.

[6]Una combinación lineal de dos vectores X, Y, es un vector de la forma $\alpha X + \beta Y$

[7]Por supuesto, lo que hay en el fondo es el concepto de isomorfismo.

Esto, claramente es una oportunidad magnífica para introducirlo porque es un ejemplo de algo que ellos han manejado durante años. A este nivel, si no se tiene la oportunidad de introducir el concepto formal, se puede hacer de manera informal, ilustrándolo, dando lugar a su introducción formal.

[8]Sean V un espacio vectorial sobre un campo C, con operaciones $\oplus$, $*$ y W también un espacio vectorial sobre C con operaciones $+$. $\quad ^{0}$; decimos que V y W son isomorfos si existe $F : V \rightarrow W$ biyectiva tal que

a)$f(v1 \oplus v2) = f(v1) + f(v2)\ v1, v2 \in V$

b)$f(\alpha * v) = \alpha^{0i} f(v)\ \alpha \in V$

A f se le llama un isomorfismo entre V y W.

[9]Recuérdese el siguiente resultado: Dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo campo son isomorfos, sí y sólo sí dim V = dim W.

[10]H. Madrid, "Operaciones con Matrices". Notas Mimeografiadas, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. (1975)

[11]Generalmente los alumnos ya conocen cómo se multiplican las matrices. Esto no me revela de mi obligación de dar una explicación del porque se multiplica de esa forma.

[12]Ver: H. Madrid. "Operaciones con matrices". Notas mimeografiadas. Facultad de Ciencias, UNAM

[13]E. Bonilla. "Algunos Aspectos de la Enseñanza del Algebra de Matrices". Tesis Profesional. Facultad de Ciencias, UNAM (1980).

[14]Ver el ejemplo E del inciso 4 de "Sobre el Concepto Vector"

[15]Copias disponibles en Depto. de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM.